M. Smoluchowski

Über den Begriff des Zufalls

~~Über den Zufall und dessen Gesetze in der Physik.~~

~~Begriff und Gesetze des Zufalls~~ " —

~~Über den Begriff des Zufalls und die Entstehung Genesis der Wahrscheinlichkeitsgesetze, d. Ph.~~

~~Über~~

Manuskript poświęcony do Prof. W. Ostwalda (Grossbothen Sachsen)

dla „Annalen der Naturphilosophie" (jeszcze nie wydrukowany)

Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze in der Physik.

Von

Prof. M. v. Smoluchowski, Kraków. (Cracovie)

Adresse d. Verf.: Prof. M. v. Smoluchowski Kraków, Studencka 27

I.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche seit Beginn ihrer Entwickelung mit grösstem Erfolg hauptsächlich in dem sonst der mathematischen Behandlung wenig zugänglichen Bereich sozialer und biologischer Vorgänge angewendet wurde, hat sich in den letzten Zeiten ein überaus wichtiges Anwendungsgebiet erobert: die Physik. Und zwar ist damit nicht etwa die seit Gauss' Zeiten als eigene Hilfs-Disziplin ausgebildete Theorie der Fehlerausgleichung bei physikalischen Messungen gemeint, sondern gerade das eigentliche Gerüst dieser Wissenschaft, das System der theoretischen Physik.

Zum ersten Male in den Jahren 1857–1860 von Clausius und Maxwell als eigenartiges mathematisches Hilfsmittel in die kinetische Gastheorie eingeführt, hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung, nach einer vorübergehenden Periode der Stagnation, infolge des schliesslichen Sieges der atomistischen Anschauungsweise eine für die Physik ganz grundlegende Bedeutung gewonnen und bildet heute das wichtigste Werkzeug bei Forschungen auf dem Gebiete der modernen Theorien der Materie, der Elektronik, Radioaktivität und Strahlungstheorie. Entspricht doch ihr Wesen durchaus der heute zur Herrschaft gelangten Tendenz, sämmtliche Gesetze der Physik *) — nach dem Vorbild der kinetischen Gastheorie — auf Statistik verborgener Elementarereignisse zurückzuführen, wobei die „Einfachheit" derselben als sekundäre Folge des Wahrscheinlichkeitsgesetzes „der grossen Zahlen" aufgefasst wird.

Trotz dieser enormen Ausdehnung des Anwendungsbereiches der Wahrscheinlichkeits-Rechnung hat die exakte Analyse der ihr zugrunde liegenden Begriffe nur geringe Fortschritte

*) Von dieser Tendenz sind bisher nur die Lorentz'schen Gleichungen der Elektronentheorie, das Energiegesetz und Relativitätsprinzip unberührt geblieben, aber es ist wohl möglich, dass im Laufe der Zeit auch hier exakte Gesetzesformen durch statistische Regelmässigkeit ersetzt werden dürften.

[illegible]

[illegible] ۱۸۲۲ - ۱۸۲۵ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[

gemacht; es gilt wohl noch heute der Satz, dass keine zweite mathematische Disziplin auf so unklaren und schwankenden Grundlagen aufgebaut ist. So werden Die Grundfragen nach der Subjektivität oder Objektivität des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, nach der Definition der Zufälligkeit u. s. w. diametral entgegengesetzter von verschiedenen Autoren in ~~der verschiedenen~~ Weise beantwortet. Insbesondere ist auch eine allgemeine und mathematisch exakte Präzisierung der für die Anwendbarkeit dieser Rechnungsmethode charakteristischen Bedingungen noch immer ausständig, und man pflegt sich in dieser Hinsicht meist auf ein intuitives Wahrscheinlichkeitsgefühl zu verlassen.

Als kleiner Beitrag zu derartigen Untersuchungen mögen die nachfolgenden Bemerkungen aufgefasst sein, welche von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Physik ausgehen, in der gewisse grundsätzliche Schwierigkeiten in besonders krasser Form auftreten. Ich will eingestehen, dass gerade das Unbefriedigende der diesbezüglichen Ausführungen in gewissen, sonst höchst beachtenswerten neueren Werken die Entstehung dieser Studie veranlasst hat. Im übrigen ~~will~~ bezweckt dieselbe selbstverständlich keineswegs eine allseitige und endgültige Aufklärung des ganzen damit zusammenhängenden Komplexes philosophischer Fragen, ~~sondern~~ will nur eine Anregung zu weiteren Untersuchungen in einer bestimmten Richtung geben indem ~~[illegible]~~ einige Leitgedanken hervorgehoben werden, welche die bisher allzusehr vernachlässigte objektive Seite des Wahrscheinlichkeitsbegriffes ins rechte Licht setzen sollen.

II.

Die Frage, welche Ereignisse in den Geltungsbereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung fallen, wird wohl allgemein dahin beantwortet: diejenigen, deren Eintritt vom Zufall abhängt. Die Untersuchung dieses letzteren Begriffes ist also jedenfalls das Primäre, und wir werden uns vor Allem klar zu machen suchen, wodurch das Wesen des Zufalls gekennzeichnet ist. Damit hängen zwei vielumstrittene Probleme zusammen, deren Schwierigkeit insbesondere ~~[illegible]~~ exakten mathematischen Spekulationen der theoretischen Physik sich besonders fühlbar macht, nämlich: ~~die Frage~~

1). Wie ist es möglich, dass sich der Effekt des Zufalls berechnen lasse, dass also zufällige Ursachen gesetzmässige Wirkungen haben?

2). Wie kann der Zufall entstehen, wenn alles Geschehen nur auf regelmässige Naturgesetze zurückzuführen ist? oder mit anderen Worten: Wie können regelmässige Ursachen eine zufällige Wirkung haben?

Betrachtet man in populärer Weise den Zufall als die Negation des Gesetzmässigen, so sind diese Widersprüche gewiss vollständig überbrückbar. Ein solcher Zufallsbegriff ist jedoch mit dem

in der heutigen Wissenschaft herrschenden Determinismus unvereinbar. Meist pflegt man sich also die Sache durch die Annahme zu erklären, dass zwar zwischen der betreffenden Ursache und Wirkung ein gesetzmässiger, kausaler Zusammenhang besteht, dass aber dessen Art für uns wegen der Komplikation der Erscheinung nicht erkennbar ist, wodurch der Schein der Gesetzlosigkeit entsteht. In diesem Sinne wäre der Zufall als eine uns „unbekannte Teilursache" zu bezeichnen ~~das entspricht der traditionellen Umdeutung eines Begriffs.~~

~~Vielleicht ist~~ Damit dürfte wohl auch Meinongs*) Auffassungsweise näher verwandt sein als es den Anschein hat, welcher zufolge Zufälligkeit die „Tatsächlichkeit" von etwas „Nicht-Notwendigem" bedeuten würde; dabei soll nämlich die negierte Notwendigkeit entweder eine innere oder äussere (relativ zu einem gewissen Komplex von Objektiven) sein. Nun man nun vom deterministischen Standpunkt aus Ursache und Wirkung als stets durch die inneren Notwendigkeitsbeziehungen ~~innerlich notwendige~~ der Teilereignisse verkettet ansieht, kann von Nichtnotwendigkeit nur in relativem Sinne die Rede sein: insofern die Notwendigkeit äusserlich nicht erkennbar ist, also insofern im Teil der wirkenden Ursachen unbestimmt ist.

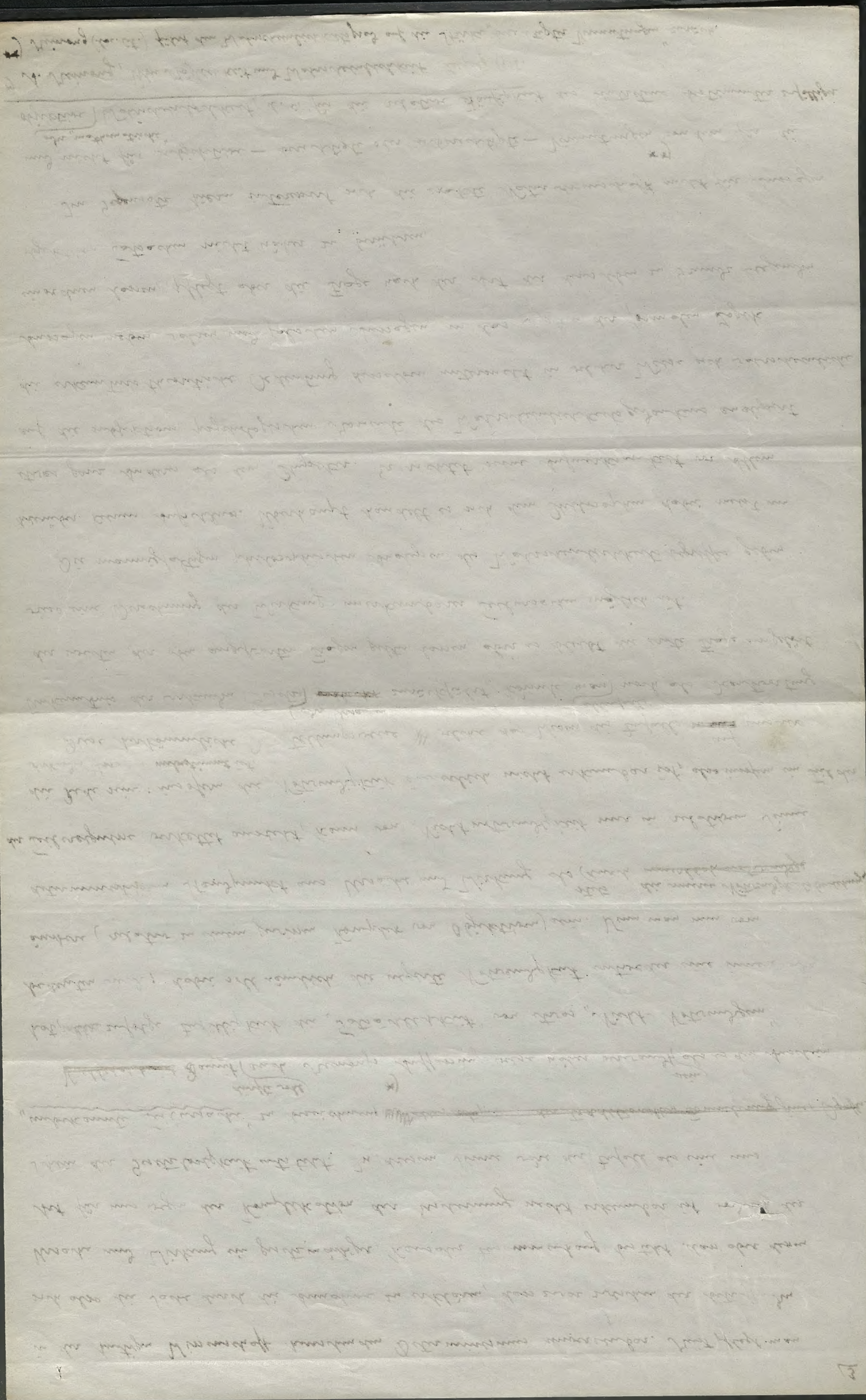
Diese herkömmliche Darstellungsweise, welche das Wesen des Zufalls ~~nicht~~ auf unseres Unkenntnis der wirkenden Gesetze (oder Ursachen) ~~blickt~~ zurückführt, könnte man allenfalls noch als Beantwortung der zweiten der oben angeführten Fragen gelten lassen, aber es bleibt die erste Frage ungelöst, wieso eine Berechnung der Wirkung unerkennbarer Teilursachen möglich ist.

Die mannigfaltigen philosophischen Analysen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes geben hierüber keinen Aufschluss. Überhaupt handelt es sich dem Philosophen dabei meist um etwas ganz Anderes als dem Physiker. Er richtet seine Aufmerksamkeit vor Allem auf die subjektiven, psychologischen Momente des Wahrscheinlichkeitsgedankens, analysirt die erkenntnistheoretische Bedeutung desselben, untersucht in welcher Weise sich wahrscheinliche Aussagen, neben wahren und falschen Aussagen, in das System der formalen Logik einordnen lassen, pflegt aber die Frage nach der Art der denselben zu Grunde liegenden objektiven Tatsachen nicht näher zu berühren.

Im Gegensatz hiezu interessirt sich die exakte Naturwissenschaft nicht für Aussagen und nicht für subjektive — berechtigte oder unberechtigte — Vermutungen**), sondern für die objektive oder „mathematische" Wahrscheinlichkeit, d. i. für die relative Häufigkeit des Eintretens bestimmter zufälliger

*) A. Meinong, Über Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit Leipzig 1915.

**) Meinong (loc. cit.) führt den Wahrscheinlichkeitsgrad auf die Stärke „berechtigter Vermutungen" zurück.



Ereignisse. Sie gebraucht also den – wie Meinong treffend bemerkt – so vieldeutigen Begriff der Wahrscheinlichkeit in einem sehr eingeschränkten Sinne, welchem jener Autor und andere Philosoph[redacted] allerdings ~~vielleicht~~ lieber die Bezeichnung Möglichkeitsgrad beilegen dürften, welcher aber eben ~~wenn, doch wird bezeichnet~~ erst in diesem engern Sinne einer exakt mathematischen Behandlung zugänglich wird. Es verhält sich damit ähnlich wie mit vielen andern Ausdrücken, wie zB. Kraft, Arbeit, Energie, Wärme, welche der Physiker in wesentlich andern Sinne versteht, als dies im gewöhnlichen Leben üblich ist.

Offenbar sind also, soweit die Anwendung in der theoretischen Physik in Betracht kommt, alle Wahrscheinlichkeitstheorien von vornherein als ungenügend zu betrachten, welche den Zufall als „unbekannte Teilursache" auffassen. Die physikalische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann nur von den Bedingungen abhängen, welche sein Zustandekommen beeinflussen, aber nicht von dem Grade unseres Wissens!

Ich bin mir wohl bewusst, dass dies im Gegensatz zu der allgemein üblichen Auffassung steht, welche eine teilweise Unkenntnis der Ursachen als das wesentliche hier in Betracht kommende Moment ansieht, darum sei als Beleg für unsere Behauptung bemerkt: Die Wahrscheinlichkeitsrechnungen der kinetischen Gastheorie würde ihre Berechtigung auch dann behalten, wenn wir die Beschaffenheit der Moleküle, deren Anfangslagen u.s.w. absolut genau kennen würden und im Stande wären, deren Bewegungen mathematisch exakt für alle Zeiten zu verfolgen. Sie wäre dann noch immer zum Wenigsten ein ebenso rationelles mathematisches Hilfsmittel wie die abgekürzte Multiplikation oder die Benützung der Logarithmentafeln (oder des Rechenschiebers) neben der üblichen exakten Multiplikation.

Wie pflegen nun die Vertreter der herkömmlichen Auffassung die Tatsache zu erklären, dass eine Berechnung der Wirkung unbekannter Teilursachen möglich ist? Sie berufen sich auf das „Gesetz der großen Zahlen", als ein zwar nicht beweisbares, aber empirisch unumstößlich erwiesenes Prinzip. So sagt zB. Timerding*): ... „die unverbrüchliche Kausalität in allem ~~Naturgeschehen~~ Naturgeschehen mag wohl aufrecht erhalten werden, sie reicht aber nicht hin, um die Regelmäßigkeit des Weltgeschehens vollständig zu erklären. Es gehört vielmehr die Tatsache hinzu, die wir als Gesetz der großen Zahlen bezeichnen, und die bewirkt, dass die

*) H. E. Timerding, Die Analyse des Zufalls p. 162 (Vieweg 1915).

Unregelmäßigkeiten, die sonst durch die zufälligen Ereignisse in die Welt hineingetragen werden, in dem Gesammtergebnis wieder verschwinden. ..... Unser Verstand sträubt sich allerdings dagegen, ein solches Prinzip nur deshalb anzunehmen, weil hier und dort eine Richtigkeit bezweckt wird, vielmehr drängt er dahin, auch einen inneren Grund für einen solchen Ausgleich zu finden. Ein solcher innerer Grund lässt sich aber nicht ermitteln ...."

Das ist wohl eine wenig erfreuliche Lösung, und man wird trachten, einen anderen Ausweg aus dem Dilemma zu finden. Übrigens bemerkt beispielsweise Poincaré, dass auch in der abstrakten Mathematik (von Wahrscheinlichkeitsgesetzen gesprochen werden kann) ~~einen Zufall gibt~~, dass z.B. die Häufigkeit der Zahlen 1, 2, 3, ... an der letzten Stelle der Zahlenkolonnen einer Logarithmentafel dem gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsgesetze gleich möglicher Fälle folgt. Wird sich der Mathematiker damit begnügen, hierin das Walten eines unbegreiflichen, rein empirischen Gesetzes der großen Zahlen anzuerkennen?

III.

Ein Fingerzeig zur Lösung der Frage scheint mir darin zu liegen, dass die oben erwähnten Definitionen des Zufalls als unbekannter Teilursache*) u. dergl. zweifellos viel zu weit sind. Als Leverrier bemerkte, dass die Bewegung des Uranus nicht genau mit der Voraus-berechnung übereinstimme, sagte er nicht: das ist Zufall! — Wir haben keine Ahnung, wann eine magnetische Störung stattfinden wird, halten aber das Eintreten derselben doch durchaus nicht für eine Sache des Zufalls.

Es fehlt in diesen Beispielen ein ganz wesentliches Merkmal desjenigen, was man im gewöhnlichen Leben oder in unserer Wissenschaft als Zufall bezeichnet, und zwar lässt sich dieses kurz in die Worte fassen: Kleine Ursache — große Wirkung! Ein minimaler Unterschied im Ingangsetzen der Roulette — Gewinn oder Verlust einer Unsumme Geldes. Poincaré, welcher hierauf nachdrücklich hingewiesen hat, gibt zwar noch zwei Alternativ-Merkmale des Zufalls an**): Komplexerheit vieler mitwirkender Ursachen oder gegenseitige

*) Gruber (Wahrscheinlichkeits Rechnung p. 8) sagt „unbekannte und wechselnde Umstände". Es ist wohl nicht recht klar, was mit „wechselnd" gemeint ist und wie der Wechsel zu erkennen ist, wenn der Umstand selber unbekannt ist. ~~Es dürfte~~ Vielleicht ist das aber ein intuitives Herausfühlen der Kriterien, die wir später besprechen werden.

**) H. Poincaré, ~~Paris 1912; Introduction~~ Calcul des probabilités, Paris 1912, Introduction.

Einwirkung weder für gewöhnlich zu unabhängigen Gebieten gehöriger Vorgänge, doch glaube ich, dass sämmtliche dazugehörigen Fälle sich bei genauer Analyse ebenfalls unter jenen Gesichtspunkt einordnen lassen.

Besonders charakteristisch tritt jenes Merkmal in allen Fällen auf, wo es sich um einen Zustand labilen Gleichgewichts handelt. Denken wir uns einen „idealen" Würfel auf eine Ecke gestellt, so ist die kleinste Verschiebung des Schwerpunktes aus der Vertikalen schon dafür entscheidend, auf welche der drei unten zusammenstossenden Flächen der Würfel zu liegen kommen wird. Welche Zahl also obenauf erscheinen wird, das so sagt man, hängt vom Zufall ab. Mathematisch ausgedrückt: die Wirkung y (obenauf erscheinende Zahl) hängt von der Ursache x (Lage des Schwerpunktes) derart ab, dass die Funktion $y = f(x)$, in dem betreffenden Gleichgewichtswerte x_0 eine Unstetigkeit aufweist.

Nebenbei bemerkt, setzt sich die Ursache in diesem Falle eigentlich aus zwei Variabeln zusammen: wenn man sich den Schwerpunkt O und die drei in der unteren Ecke E zusammenstossenden Kanten auf die Horizontalebene projiziert, sieht man, dass die Entfernung $r = \overline{OE}$ in der so erhaltenen Projektion für die Geschwindigkeit massgebend ist, mit welcher das Umfallen erfolgt, die durch einen Winkel θ definierbare Richtung des Vektors OE in Bezug auf die drei Kantenlinien für die Zahl, welche obenauf ~~zu~~ erscheinen wird.

Nun entzieht sich aber ein derartiger Zufall jeder approximativen Berechnung und kann auch niemals die Grundlage zur Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden. Denn solange man die bestimmenden Ursachen (Richtung und Stärke des Vektors OE) nicht mit genügender Genauigkeit kennt, lässt sich bezüglich des Effektes überhaupt gar nichts voraussagen. Kennt man sie aber, so ist die Wirkung mit Gewissheit vorauszusehen, und es bleibt kein Raum für Wahrscheinlichkeit übrig.

Als Beispiel eines unberechenbaren Zufalls sei noch ein anderer Fall angeführt: wenn ein Artillerist mit einem mathematisch exakt schiessenden ~~Ge~~ Geschütz nach einem Ziel schiesst, dessen Entfernung ihm unbekannt ist. Es fehlt ihm die Kenntnis einer der Variabeln, ~~welche~~ von denen die richtige Elevation abhängt, und es wäre ein blinder Zufall, wenn er einen Treffer erzielen würde. Von irgend einer Vorausberechnung, von einer Wahrscheinlichkeit in unserem Sinn, kann daher nicht die Rede sein, solange uns die Psychologie jenes Artilleristen nicht näher bekannt ist.

Sobald wir aber wissen, dass derselbe eine gewisse ~~Art~~ Methode systematischen Einschiebens anwendet, oder sobald gewisse mechanische Hilfsmittel von später zu besprechender Art (od. Rotation des Schüttelrohres um die ~~Horizontal~~ Lageraxe) mitspielen, wird die Aufgabe eine ganz definirte, und ~~ermöglicht~~ lässt sich (mit Rücksicht auf die Grösse des Zieles und seine Entfernung u.s.w.) ~~ein~~ eine bestimmte Treffwahrscheinlichkeit angeben.

Der einer Wahrscheinlichkeitsberechnung entsprechende — vielleicht darf man sagen: „dingeregelte" — Zufall zeichnet sich also vor dem ~~[illegible]~~ Zufall in weiterem Sinne durch ein wesentliches Charakteristikum aus: <u>eine gewisse Regelmässigkeit der Wirkung</u> bei öftmaliger Wiederholung des Vorganges, unabhängig von der speziellen Art der Ursache.

Lässt man den vorher besprochenen Würfel aus der Höhe eines Meters auf eine ideal ebene (vollkommen elastische) Unterlage fallen, so ändert sich jener Vorgang in wesentlicher Weise. Der Würfel prallt ab, steigt empor und wiederholt diese Bewegungen mehrmals mit abnehmender Amplitude und unter Annahme scheinbar unregelmässiger Rotationsbewegungen, bis er auf irgend einer seiner sechs Seiten liegen bleibt. Auf welche er schliesslich zu liegen kommt, muss natürlich von der Art der anfänglichen Abweichung aus der axial-lotrechten Stellung abhängen, aber die Funktion $y = f(x, \theta)$, welche diese Abhängigkeit ausdrückt, wird so beschaffen sein, dass bei kontinuirlicher Variation der zwei die Anfangslage definirenden Variabeln x, θ, in äusserst raschem Wechsel Gebiete durchschritten werden, welche allen möglichen Endlagen entsprechen, derart dass bereits innerhalb eines äusserst kleinen Variabilitätsbereiches V der Axenstellung (in Bezug auf die Lotrechte) die den Zahlen 1–6 zugehörigen Bereiche ungefähr flächengleich werden. Diese Grösse V könnte man vielleicht mit dem Namen Ausgleichsgebiet belegen.

Würde man ~~[illegible]~~ nun versuchen, den Würfel vor dem Fallenlassen durch menschliche Hilfsmittel in irgend einer Weise zu orientiren, so ist klar, dass dabei gewisse Einstellungsfehler trotz grösster Sorgfalt unvermeidlich sind. Den Bereich dieser unvermeidlichen Fehler wollen wir als Schwankungsbereich Ω bezeichnen, und man darf wohl annehmen, dass die Verteilungs-Funktion $\varphi(x, \theta)$, welche die relative Häufigkeit jener Fehler bei unzähliger Wiederholung der Versuche darstellt, einen regelmässigen „analytischen" Charakter besitze. Ist daher das (durch die Art der zwangsläufigen Funktion $f(x, \theta)$ bestimmte) Ausgleichsgebiet V klein im Vergleich zum individuellen Schwankungsbereich Ω, so ist leicht einzusehen, dass schliesslich für alle Zahlen 1–6 eine gleiche Wahrscheinlichkeit resultiren muss, unabhängig von der speziellen Art der beabsichtigten Einstellung und von der individuellen Variationsfunktion $\varphi(x, \theta)$. Das Einzel-

ereignis ist also nicht vorauszusehen, wohl aber die Gesamtverteilung der Ereignisse bei fortgesetzter Wiederholung. In einem solchen Falle waltet der Zufall in gesetzmässiger Weise.

Einfacher als der obige Fall ist das Beispiel der Roulette, an welchem Poincaré *) analoge Betrachtungen anstellt, oder das Beispiel der einem Schützen als Ziel dienenden rotierenden Sektoren-Scheibe. Ob derselbe einen schwarzen oder weissen Sektor treffen wird, hängt vom Zeitpunkt ab, wann das (feststehende) Gewehr abgedrückt wird. Man kann aber immer die Scheibe in so rasche Rotation versetzen, dass die Treffsicherheit des Schützen ausgeschaltet wird. Mag er sich in einem beliebigen Moment entschlossen, loszudrücken, jedenfalls vergeht vom Entschluss bis zur Tat noch eine unbestimmte, in gewissen Grenzen variable Zeit, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Schuss gerade zur Zeit t losgeht, durch eine (im Schwankungs-Bereich von t bis t+τ von Null merklich verschiedene) Funktion φ(t) dargestellt wird, von der anzunehmen ist, dass sie keine singulären Eigenschaften, wie Unstetigkeiten, außerordentlich viele Maxima und Minima u.dergl., aufweist, deren Form aber sonst gleichgültig ist.

Entfallen also auf den Schwankungsbereich τ der Zeit genügend viele Rotationen der Scheibe, so verschwindet der Einfluss der individuellen Form der Verteilungsfunktion φ(t), die Wahrscheinlichkeit einen weissen oder schwarzen Sektor zu treffen, hängt dann nur vom relativen Flächeninhalt derselben ab. Man pflegt dann von jener Wahrscheinlichkeit schlechthin zu reden, ohne Rücksicht auf die Funktion φ, aber stillschweigend macht man doch betreffs φ die vorher erwähnten Annahmen. Jene Wahrscheinlichkeitsüberlegung würde beispielsweise ganz gegenstandslos werden, falls das Gewehr mit der Sektoren-Scheibe mittels eines elektrischen Kontaktes in passender Weise verbunden wäre.

In letzter Linie basiert die ganze Argumentation offenbar auf der Tatsache, dass jede (differenzierbare) Funktion sich im Bereich genügend kleiner Veränderungen der unabhängigen Variabeln angenähert proportional mit derselben ändert, und sie lässt sich durch eine einfache geometrische Analogie illustrieren: wenn man auf Papier, das in schmale, gleichbreite, alternierend weiße und schwarze Flächenstreifen zerlegt ist, aus freier Hand eine beliebige (aber nicht zu kleine und nicht zu unregelmäßige!) geschlossene Curve zieht, so wird der von derselben ausgeschnittene „weiße" und „schwarze" Flächeninhalt sehr nahe gleich groß sein, ohne Rücksicht auf die Art jener Curve. Letztere entspricht dem, was wir individuellen Schwankungsbereich genannt haben, während die Zerlegung des Papiers in Flächenstreifen durch die zwangsläufige Art der Kausal-Relation y = f(x) bestimmt ist.

Somit sehen wir, wie für die Wirkung des Zufalls ein bestimmtes Gesetz resultieren kann, ohne Rücksicht auf die spezielle Form jener unbekannten, primären Verteilungsfunktion φ, womit der erste der im II. Abschnitte hervorgehobenen Widersprüche seine Aufklärung findet. Allerdings muss man zugestehen, dass unsere Überlegungen das eigentliche Wesen des Zufalls noch nicht erschöpfend darstellen, denn sie beruhen ja auf der Annahme einer Verteilungsfunktion φ für die zufälligen Schwankungen der Ursache, von der überdies eine gewisse Eigenschaft (ein „regelmässiger Verlauf") vorausgesetzt wird. Dieser Umstand findet seinen Ausdruck in einer — übrigens ganz

*) Poincaré, loc. cit.

zutreffenden Aussage, mit welcher sich Mathematiker*) über diese Fragen hinwegzusetzen lieben: Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nicht Erklärung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, sondern die Ermittelung derselben auf Grundlage der als bekannt angenommenen Wahrscheinlichkeit eines einfacheren dasselbe verursachenden (oder dadurch bewirkten) Vorganges.

IV.

Fassen wir das bisher Gesagte in verallgemeinerter Form zusammen:

Der Ausdruck Zufall wird zur Bezeichnung einer speciellen Art von Kausal-Relationen gebraucht. Man sagt nämlich gewöhnlich, dass ein Ereignis y vom Zufall abhängt, wenn es eine solche Function einer (eventuell auch ihrem Wertmasse nach unbekannten oder absichtlich ignorirten) ~~[illegible]~~ veränderlichen Ursache oder Teilbedingung x ist, dass das Eintreten oder Nichteintreten derselben von einer sehr kleinen Änderung des x abhängt [wobei unter „klein" verstanden wird: „klein im Verhältnis zum Schwankungsbereich des x"]. (?)

Dieser populäre Zufallsbegriff eignet sich jedoch nicht als Grundlage eines exakt definierbaren Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Von einem mathematischen Wahrscheinlichkeitsgesetz W(y) kann betreffs einer Größe y erst dann gesprochen werden, wenn die Kausal-Relation $y = f(x)$ ~~auch~~ außer der vorher erwähnten noch eine specielle Eigentümlichkeit besitzt, nämlich wenn die Verteilung der y, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, unabhängig ist von der Art der Verteilungsfunktion $\varphi(x)$, welche die relative Häufigkeit der x bestimmt (vorausgesetzt, dass die Funktion $\varphi(x)$ einen „regelmässigen" Verlauf habe).

Eine hierzu hinreichende mathematische Bedingung lässt sich (für den Fall einer einzigen unabhängigen Variabeln) leicht aufstellen, wenn man die früher dargelegten Beispiele ins Auge fasst. Es genügt nämlich, dass die Funktion $y = f(x)$ einen derartigen „oszillirenden" Charakter habe, dass:

1). für jeden innerhalb des Schwankungsbereiches Ω gelegenen x_0 Wert ein solches, im Verhältnis zu Ω äusserst kleines Δx angebbar ist, dass die Funktion $y = f(x) = f(x_0 + \varepsilon \Delta x)$ sämmtliche y Werte (innerhalb gewisser Grenzen) durchläuft, sobald die Variable ε die Werte von 0 bis 1 durchläuft

2). dass der Bruchteil des ε-Gebietes, welcher einem gewissen Gebiet von y-Werten entspricht, für alle innerhalb Ω gelegene x_0 Punkte (annähernd) gleich groß ist.

~~Die~~ Für jedes x gibt es also einen kleinsten Bereich Δx, welchem eine Variation über alle Werte y entspricht, und die Größe desselben definiert gewissermaßen die Struktur der ~~Wahrscheinlichkeit~~ Kausal-Funktion Relation $f(x)$; je „feinkörniger" dieselbe ist, d. h. je kleiner jene Δx sind, desto geringer sind die Anforderungen, welche man betreffs der ~~Gleichförmigkeit der~~ „Regelmässigkeit" der primären Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ stellen muss, um ein von der Art derselben unabhängiges Resultat für die Verteilung W(y) zu erhalten.

---

*) Siehe z.B. E. Borel, Le Hasard, Alcan Paris 1914, p. 15.

Natürlich ist dabei umgekehrt ein jeder y Wert durch eine Menge verschiedener x realisierbar, d.h. die inverse Funktion ist im hohem Grade vieldeutig: die gleiche Wirkung kann durch sehr verschiedene ursächliche Konstellationen hervorgebracht werden — ebenfalls ein sehr charakteristischer Zug jener Kausal-Relationen, welche die Entstehung von Wahrscheinlichkeitsgesetzen veranlassen.

Spezielle Beispiele derartiger funktionaler Zusammenhänge sind leicht zu geben zB.: $y = \sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Setzen wir voraus, dass α äusserst klein ist im Vergleich zum Schwankungsbereich der „Ursache" x, so wird auch $\Delta x = \frac{2\pi}{\alpha}$ sehr klein, und es resultiert für die „Wirkung" y eine von der Wahrscheinlichkeit der x weitgehend unabhängige Häufigkeitsverteilung:

$$W(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

Noch einfacher ist der früher betrachtete Fall der rotirenden Scheibe. Hiebei nehmen wir als x die Zeit t an, zu welcher der Schuss losgeht, als y die Winkeldistanz θ des Treffpunktes in der Scheibenebene (von einem bestimmten Radius derselben ab gerechnet). Es ist also: $\theta = ct - 2n\pi$, wobei die Winkelgeschwindigkeit c eine sehr grosse Zahl sein soll und n immer so gewählt wird, dass θ zwischen 0 und 2π gelegen sei. Der Bereich Δx ist offenbar auch in diesem Falle gleich $\Delta x = \frac{2\pi}{c}$, und es werden alle Winkel θ gleichwahrscheinlich sein, wenn diese Grösse klein ist im Vergleich mit dem Schwankungsbereich der Ursache.

Es gibt jedoch zahlreiche und ausserdem noch der mathematischen Analyse nicht so leicht zugängliche Fälle, in denen die Unabhängigkeit des resultirenden Wahrscheinlichkeitsgesetzes von der Art und Ursache der primären Schwankungen mit beliebiger Annäherung mittels rein physikalischer Vorrichtungen hervorgebracht wird. Als typische derartige Fälle seien nachstehende Beispiele etwas eingehender besprochen:

I). Das Galton'sche Brett. Es besteht aus einem geneigt aufgestellten Brett, in welches eine grosse Anzahl von Stiften, in regelmässigen Horizontalreihen angeordnet, eingeschlagen werden, und zwar ist die Anordnung derselben eine alternirende, so dass die Stifte jeder Reihe den Öffnungen der beiden benachbarten Reihen entsprechen. Werden nun von einem gegebenen Punkt aus Kugeln von passender Grösse (so dass ihr Durchmesser wenig kleiner sei als der freie Abstand zwei benachbarter Stiften) über das Brett rollen gelassen, so werden sie infolge der Zusammenstösse mit jenen Stiften aus ihrer Bahn ~~abgelenkt~~ in unregelmässiger Weise abgelenkt und sammeln sich schliesslich nach Passirung sämmtlicher Stiftreihen in den am unteren Brettrande angebrachten Behältern an, so dass die Höhe, zu der sie in denselben reichen, direkt als Mass der Wahrscheinlichkeit der betreffenden Lage dienen kann.

Es zeigt sich, dass sie sich daselbst gemäss dem Gauss'schen Fehlergesetz: $y = A e^{-\alpha x^2}$ anordnen, so dass die meisten sich in der Fallinie des Ausgangspunktes ansammeln, während ihre Zahl nach beiden Seiten zu nach Massgabe der bekannten Glocken-Curve abnimmt. Dieses Resultat ist mathematisch leicht erklärlich, sobald man annimmt, dass eine jede Kugel nach dem Austritt aus der Öffnung zwischen zwei Stiften gleiche Wahrscheinlichkeit dafür besitzt, dass sie die nächste Stiftreihe zur Rechten oder zur Linken des darunter stehenden Stiftes passiren wird.

Erfolgt nämlich dieser Vorgang ganz zufällig, mit gleicher Wahrscheinlichkeit für rechts und links, so lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel beim Passiren der $m$ten Stiftreihe eine dem $n$fachen Nagelabstand gleiche seitliche Entfernung aus der Mittellinie besitze, nach dem bekannten Bernoulli'schen Satze zu $W(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{m!}{(\frac{m}{2}-n)!\,(\frac{m}{2}+n)!}$ bestimmen, was für große Werte der Zahl m angenähert in die vorerwähnte Formel übergeht. Es wird also die komplizierte Gesamterscheinung auf einfache Elementarvorgänge zurückgeführt, aber es bleibt noch aufzuklären, wieso letztere als ganz zufällig angesehen werden können, obwohl eigentlich die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit der Kugel die weitere Bewegung derselben eindeutig bestimmen sollte.

Um unkontrollirbare Nebenumstände möglichst auszuschalten, idealisiren wir das Beispiel durch Voraussetzung vollständiger Glattheit der schiefen Ebene, exakter Anordnung der Stifte, exakter Kugelgestalt der Kügelchen und nehmen wir ferner an, der Kugeldurchmesser sei fast genau gleich dem freien Abstand der ~~Kugel~~ Stifte, und die Stöße der Kugeln an letzteren mögen unelastisch verlaufen. Offenbar ist dann die nach Austritt der Kugel zwischen zwei Stiften spurenweise übrig bleibende Horizontalkomponente der Fallgeschwindigkeit allein maßgebend dafür, ob der nächste Stift auf der rechten oder linken Seite getroffen wird, ob also die Kugel demselben auf der einen oder anderen Seite passiren wird. Jene Horizontalkomponente ist aber das Resultat vielfacher Reflexionen der Kugel zwischen jenen zwei Stiften und ist durch die Lage der Zentrilinie beim ersten Stoß an der betreffenden Stiftreihe eindeutig bestimmt. Eine ganz minimale Lageänderung dieser Zentrilinie genügt um zu bewirken, dass die Richtung jener Horizontalkomponente umgekehrt wird; bei weiterer äußerst geringer Lagenänderung wird dieselbe wieder umgekehrt u. s. w.

Wir erkennen im Obigen die wesentlichen Züge des „geregelten" Zufalls: 1). „Kleine Ursache – große Wirkung", 2). den oszillirenden Charakter der Kausal-Relation, welcher sich ungenau aber ~~charakt~~ bezeichnend auch durch die Worte ausdrücken lässt „Verschiedene Ursachen – gleiche Wirkungen" 3). die annähernd gleichmäßige Verteilung der Chancen der Elementarereignisse. Im Grenzfalle, wenn der Kugeldurchmesser genau gleich dem freien Abstand der Stifte ist, verliert die Funktion, welche den Zusammenhang zwischen Anfangskonstellation und Endlage der Kugel darstellt, den analytischen Charakter. Die Chancen für eine positive und negative Verschiebung werden bei jedem Stoß genau gleich groß, und es wird sich die Gauss'sche Glockencurve herstellen, ganz unabhängig davon wie klein auch die Schwankung der Anfangskonstellation der Kugeln sei (vorausgesetzt sie ist nicht genau gleich Null). Wir erhalten ein Modell eines sozusagen ideal zufälligen Vorganges.

Dieser Vorgang bildet, nebstbei bemerkt, eine treffliche Illustration einer ganzen Klasse physikalischer Erscheinungen, welche wir im Allgemeinen als Diffusion und Wärmeleitung zu bezeichnen pflegen. Ohne an dieser Stelle in Einzelheiten einzugehen, erwähnen wir beispielsweise, dass die seitlichen Verschiebungen, welche die Kugel beim Hindurchrollen durch die aufeinanderfolgenden

Stiftreihen erzeugt, genau mit den der sogen. Brown'schen Molekularbewegung entsprechenden Verhältnissen übereinstimmen. Und würden wir ~~[illegible]~~ diese Versuche dadurch modifizieren, dass wir ein „begrenztes Galton'sches Brett" verwenden, dessen Seiten-Ausdehnung durch zwei in der Fallrichtung verlaufende Leisten begrenzt ist, und dass wir aus allen Öffnungen der obersten Stiftreihe auf der rechten Hälfte des Brettes schwarze, auf der linken Hälfte weiße Kugeln austreten lassen, so würde deren allmählige Vermischung beim Passieren der Stiftreihen genau der Diffusion zweier Gase in den bekannten Versuchen Loschmidts entsprechen. Besitzt das „begrenzte Galton'sche Brett" eine hinreichende Länge, so ~~[illegible]~~ muss eine homogene Endverteilung resultieren.

II). Ein in mathematischer Hinsicht komplizierteres, aber physikalisch noch einfacheres Beispiel ist das Folgende: Denken wir uns ein unregelmäßig, aber im Übrigen beliebig geformtes Gefäß, mit vollkommen reflektierenden Wänden, in welches wir durch ein sehr kleines, in einer Wand angebrachtes Loch ein elastisches Kügelchen, (am besten ein Gasmolekül) hineinschießen, und überlegen wir, wann das Kügelchen wieder durch jenes Loch aus dem Gefäße austreten dürfte. Sofern die Öffnung im Verhältnis zur ganzen Wandfläche genügend klein ist, wird die Kugel im Allgemeinen infolge der vielfachen Reflexionen einen äußerst komplizierten Zickzackweg zurücklegen müssen, bis sie die Austritts-Stelle erreicht, und es ist klar, dass eine ganz minimale Änderung der Anfangsrichtung nach längerer Zeit eine sehr erhebliche Änderung der Bahn und damit auch eine bedeutende Änderung der Austrittszeit hervorrufen muss. Ebenso begreift man, dass dieselbe Austrittszeit mittels sehr verschiedener Anfangskonstellationen zu erreichen ist — man braucht hierzu nur verschiedene Austrittsbahnen rückwärts zu verfolgen. Es scheint also die Möglichkeit einer Wahrscheinlichkeitsberechnung gegeben zu sein.

Allerdings ist eine exakte mathematische Analyse wohl noch nicht durchgeführt worden, aber physikalische Überlegungen aus dem Gebiete der kinetischen Gastheorie, wie auch der Strahlungstheorie, wo dasselbe Problem in anderer Form zur Sprache kommt, machen es plausibel, dass bei ganz beliebiger Verteilung der Anfangsrichtungen im Laufe der Zeit eine Ausgleichung der ~~[illegible]~~ Wahrscheinlichkeit stattfindet, so zwar dass dann jedes Volumelement jenes Hohlraumes für die Kugel einen gleich wahrscheinlichen Aufenthaltsort bildet, dass sie sich in irgend einer Richtung gleich wahrscheinlich bewegt und dass sie durchschnittlich auf jedes Flächenelement der Gefäßwand gleich häufig auftrifft.

Wird die Geschwindigkeit der Kugel mit c, das Volumen des Gefäßes mit V, und der Querschnitt der freien Öffnung mit ω bezeichnet, so läßt sich nach Analogie mit gastheoretischen Rechnungen leicht nachweisen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Austritt der Kugel während des Zeitraumes τ erfolge, beträgt: $W = \frac{\omega c \tau}{4V}$; also ist die durchschnittlich bis zum Austritt der Kugel aus dem Gefäß verfließende Zeit: $T = \frac{4V}{\omega c}$.

In noch weit höherem Grad kommen übrigens die charakteristischen Züge des (geregelten) Zufalls zur Geltung, wenn es sich um die Bewegung einer Schar von Kugeln handelt, welche in ein geschlossenes Gefäß eingesetzt werden, da dann die gegenseitigen Zusammenstöße derselben vor Allem ~~dann~~ die Wirkung haben, den ursprünglich vorhandenen Bewegungszustand in unregelmäßiger Weise zu stören.

Es ist das ein Spezialfall der von Boltzmann als allgemeine Eigenschaft molekularer Systeme erkannten Tendenz zur molekularen Unordnung, auf welcher ~~in der~~ die kinetische Erklärung des Entropiesatzes beruht.

V.

Die Überlegungen, mittels welcher wir im Abschnitt III und IV das Wesen des Zufalls zu charakterisieren und die Gesetzmäßigkeit der Wirkungen desselben zu erklären suchten, scheinen mir, wie bereits vorher ~~andeutungsweise~~ angedeutet wurde, in zweifacher Hinsicht nicht ganz befriedigend zu sein:

1). Es wurde angenommen, dass die „Ursache" x ein Wahrscheinlichkeitsgesetz $\varphi(x)$ befolgt, also wurde dieser Begriff als etwas Primäres vorausgesetzt. Gegenstand der Erklärung war nur die Unveränderlichkeit des Wahrscheinlichkeitsgesetzes für die resultierende Wirkung.

2). Es wurden gewisse Eigenschaften der Funktion $\varphi(x)$ vorausgesetzt, welche wir als „Regelmäßigkeit" bezeichnet haben.

Diese zwei Bemerkungen machen uns vor Allem auf einen mehr formalen Mangel ~~jener~~ unserer Darstellung aufmerksam. Was bedeutet es nämlich, wenn wir sagen, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des x (Handbewegung beim Inganggesetzen der Roulette, Orientierung des fallengelassenen Würfels, der Kugel auf dem Galton'schen Brette) durch eine regelmäßige Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ bestimmt ist? Handelt es sich um ein x, welches wir nicht auf noch primärere Ursachen zurückführen können, so wäre das Gesetz $\varphi(x)$ nur empirisch ~~bestimmbar~~ erkennbar. Unmittelbar gegeben sind aber nur diskrete Einzelfälle, und erst durch Abstraktion auf Grund unzählig vieler Spezialfälle kommt man dazu, auf deren Grund die Häufigkeitsfunktion $\varphi(x)$ zu formulieren, von welcher die Eigenschaft (2) vorausgesetzt wird.

Es wäre also weit rationeller, wenn wir den Umweg über die Einführung der abstrakten ~~Häufigkeits~~ Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ ganz vermeiden und direkt nur eine gewisse Menge von Einzelfällen in Betracht ziehen würden. Versuchen wir also anstatt der hervorgehobenen Stelle des

IV Abschnittes ~~könnte man also sagen~~ folgenden Satz zu setzen: Von einer mathematischen Wahrscheinlichkeit kann nur dann die Rede sein, falls die den kausalen Zusammenhang zwischen zufälligen*) Ursache x und Wirkung y darstellende Funktion y = f(x) derart beschaffen ist, dass einer beliebig verteilten Menge von x Werten immer annähernd eine und dieselbe Verteilung der zugehörigen y Werte entspricht. Dabei soll das Wörtchen „annähernd" den Umstand ausdrücken, dass exakte Identität der y-Verteilungen nur bei unendlich zahlreichen Mengen zu erwarten ist.

Am Klarsten übersieht man diese Verhältnisse bei der rotirenden Scheibe: im Allgemeinen wird dieselbe von den Treffpunkten ungefähr gleichförmig überdeckt sein, falls eine genügende Anzahl von Schüssen in beliebigen Zeit-Intervallen abgegeben wird, und die Verteilung der Trefferdichte auf der Scheibe wird verhältnismäßig desto gleichförmiger sein, je größer die Anzahl der Schüsse. Nun sind aber offenbar auch ganz abweichende Ergebnisse möglich. Wären z.B. alle Zeit-Intervalle gleich und mit der Umlaufszeit der Scheibe kommensurabel, so würden sich alle Treffpunkte auf gewisse Stellen konzentriren, während der Rest der Scheibe leer bleiben würde. Das wäre ein entscheidender Einwand gegen die Anwendbarkeit der ~~erwähnten gewählten~~ in Rede stehenden Formulirung unseres Satzes, wenn uns nicht die Erwägung zu Hilfe käme, dass derlei abweichende Anordnungen nur gewisse „singuläre" Ausnahmsfälle bilden, deren Häufigkeit im Verhältniss zu allen möglichen Anordnungen offenbar verschwindend klein ist.

In der Mengenlehre beweist man bekanntlich, dass es — populär ausgedrückt — unendlich mal so viele irrationale Zahlen gibt als ganze Zahlen, und in analoger Weise sieht man ein, dass unter allen möglichen Intervall-Längen diejenigen, welche mit der vorgegebenen Umlaufszeit kommensurabel sind, nur einen ~~verschwindend~~ unendlich kleinen Bruchteil bilden. Werden also aufs Geratewohl verschiedene Intervall-Längen gewählt, so ist es unendlich wenig wahrscheinlich, dass man gerade solche treffen wird, welche mit der vorgegebenen exakt kommensurabel sind. Somit wird „im Allgemeinen" eine annähernd gleichförmige Überdeckung der Scheibe resultiren.

Analoges gilt auch in andern Fällen. Hat z.B. das im Abschnitt IV (2) erwähnte Gefäß die Gestalt eines „mathematischen Würfels", so ist leicht einzusehen, dass die hineingeschleuderte Kugel sich trotz beliebig vieler Reflexionen nur in ~~acht~~ einer von acht bestimmten Richtungen bewegen kann. Es genügt aber eine beliebig kleine Abweichung der

*) „zufällig" in dem vorher definirten Sinne.

Neigungswinkel der Wände, um diese Anordnung nach entsprechend langer Zeit zum Verschwinden zu bringen und sämmtliche Richtungen des Raumes für die Bewegung der Kugel ~~annähernd~~ gleich wahrscheinlich zu machen. Falls also nicht ein spezielles „ad hoc" mathematisch genau konstruirtes Gefäß ausgesucht wird, so müßten innerhalb einer Schar derartiger Kugeln ~~durch~~ die Reflexionen derselben an den Gefäßwänden [ausserdem auch ~~durch~~ die gegenseitigen Zusammenstöße!] eine Gleichverteilung der Bewegungsrichtungen im Raume ~~im~~ hervorbringen.

Bis in alle Einzelheiten lassen sich diese Verhältnisse in einem ähnlichen aber zweidimensionalen Beispiele übersehen, in welchem die mit den Reflexionen an den Wänden verbundenen Diskontinuitäten vermieden werden sollen. Stellen wir uns einen Punkt vor, welchen wir unter Einfluss willkürlich gewählter, von einander unabhängiger elastischer Kräfte X, Y eine zusammengesetzte Schwingungsbewegung: $x = a \sin \alpha t$, $y = b \sin \beta t$, ausführen lassen, wie dies beispielsweise bei der Darstellung der Lissajou'schen Figuren in der Akustik geschieht.

Würde es uns gelingen die betreffenden elastischen Systeme (Stimmgabeln) derart abzugleichen, dass die beiden Schwingungszahlen mit einander kommensurabel werden, so würde der betreffende Punkt nur eine geschlossene Curve in periodischer Weise zurücklegen, ohne die übrigen Teile der Fläche des Rechteckes ab zu durchstreichen. Kommt aber hierbei mathematische Genauigkeit in Betracht, so würde dies offenbar einen ganz ausnahmsweisen Spezialfall bilden, welchen wir mit menschlichen Hülfsmitteln nie zu erreichen hoffen können, da es unendlich wahrscheinlicher ist, dass sich ein irrationales Verhältnis der Schwingungszahlen einstellt. Im Allgemeinen entsteht also eine ungeschlossene Curve, welche jedem innerhalb des Rechteckes ab gelegenen Punkte beliebig nahe kommt, und zwar findet man leicht, dass die ~~mittlere~~ relative Häufigkeit ~~(~~ (gleich der relativen Aufdauer), mit welcher der schwingende Punkt in einem gewissen, an der Stelle x y gelegenen Flächenelement angetroffen wird, gegeben ist durch:

$$W(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi^2}\,\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}\,\sqrt{b^2-y^2}}\,dx\,dy$$

und zwar ist dieses Wahrscheinlichkeitsgesetz, wie wir sehen, von der Art der Festsetzung der Schwingungszahlen (bezw. der Kräfte X, Y) im Allgemeinen ganz unabhängig.

Bemerkt sei dann noch, dass durch die obigen Schwingungsgleichungen zu jedem Punkt

der durchlaufenen Fläche eine (bezw. zwei) Fortschreitungsrichtung und eine gewisse Bewegungsgeschwindigkeit zugeordnet ist. Falls nun anstatt eines einzigen, vom Nullpunkt ausgehenden Punktes eine ganze Schar derartiger, aber anfangs willkürlich über jene Fläche verteilter Punkte gemäß jener Formeln in Bewegung gesetzt wird, so ergeben ganz analoge Überlegungen wie vorher, dass im Allgemeinen nach entsprechend langer Zeit die Spuren der ursprünglichen Anordnung der Punkte verschwinden, und eine von der Art derselben unabhängige Verteilung nach Maßgabe des oben angeführten Wahrscheinlichkeitsgesetzes resultiert.

In ähnlicher Weise ist leicht einzusehen, dass andauerndes Durchrühren zweier in einem Gefäße anfänglich gesonderter Farbstofflösungen im Allgemeinen eine homogene Mischung bewirkt, dass eine Schar von Gasmolekülen, welche in einem geschlossenen Raume ursprünglich beliebig angeordnet wurden, sich im Allgemeinen im Laufe der Zeit über denselben ohne Rücksicht auf die anfängliche Anordnung so verteilen, als ob ihre Lagen ganz zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit für alle Volumelemente) wären. Dies rechtfertigt eben die Benützung der üblichen Methoden der kinetischen Gastheorie zur Berechnung solcher Größen, in denen die Durchschnittswirkung einer großen Molekülzahl zum Vorschein kommt.

In allen derartigen Fällen sind singuläre Ausnahmefälle theoretisch möglich, kommen aber wegen ihrer verschwindend geringen Wahrscheinlichkeit praktisch nicht in Betracht. Wenn wir aber, um diesbezüglichen Einwänden zu begegnen, deren Möglichkeit in der Formulierung unseres vorherigen Satzes (S. 14) berücksichtigen, so müssen wir in demselben das Wörtchen „immer" durch den Ausdruck „im Allgemeinen" – d. h. mit Ausnahme prozentuell verschwindend wenig zahlreicher Ausnahmefälle – ersetzen.

Vielleicht ist aber folgende etwas präzisere Form vorzuziehen: Für eine Wirkung y, welche von der unvollständig bestimmten Ursache x abhängt, besteht ein Wahrscheinlichkeitsgesetz, wenn die den betreffenden Kausalzusammenhang darstellende Funktion $y = f(x)$ gewisse Eigentümlichkeiten besitzt, nämlich wenn: 1). Kleine Änderungen von x im Allgemeinen große Änderungen von y hervorrufen, 2). wenn die Menge solcher Gruppierungen von x Werten, welchen annähernd eine und dieselbe Gruppierung von y Werten entspricht, unermeßlich zahlreicher ist als die Menge der x-Gruppierungen, welchen merklich abweichende y-Verteilungen entsprechen.

Vom mathematischen Standpunkt aus wäre dieser Satz gewiss noch schärfer zu fassen, aber die obige Formulierung dürfte den Grundgedanken, auf welchen es hier ankommt, in genügend verständlicher Weise hervorheben. Dabei möchten wir auf einen Umstand noch ausdrücklich aufmerksam machen, welcher in dem eben Gesagten wie auch in fast allen unseren Beispielen klar zu Tage tritt: dass nämlich vollständige Zufälligkeit und dementsprechende Reihenheit der Wahrscheinlichkeitsrelation offenbar einen Idealfall bildet, welcher in Wirklichkeit mit größerer oder geringerer Annäherung erreicht wird. In den praktischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist man meist durch eine sehr rohe Annäherung vollkommen befriedigt.

VI.

Noch wichtiger als die mehr formale Frage, die uns im vorigen Abschnitte hauptsächlich beschäftigte, scheint mir die Frage nach der eigentlichen Genese des Zufalls zu sein, welche durch den ersten der beiden daselbst erwähnten Einwände nahegelegt wird, teilweise allerdings auch schon in den betreffenden Beispielen ihre Beantwortung findet. Die zufällige Variabilität der Ursachen, auf welche sich unsere ursprüngliche Erklärung des Gesetzes der großen Zahlen stützte, ist ohneweiters verständlich, wenn es sich um Experimente handelt, welche von menschlicher Hand ausgeführt werden; es wird da der Zufall in letzter Linie auf psychologisch-physiologische primäre Ursachen zurückgeführt. Wenn aber der Mensch, samt seinen unberechenbaren classischen Einfällen, ganz ausgeschaltet wird, wenn man annimmt, dass die einen physikalischen Vorgang bestimmenden Umstände ganz exakt definiert sind, kann da der Begriff der Wahrscheinlichkeit keine Anwendung finden?

Meist wird dies behauptet, während uns die Beispiele der beiden vorhergehenden Abschnitte eines Besseren belehren. Wird eine einzige Kugel in ganz bestimmter Weise auf ein „begrenztes" Galton'sches Brett gesetzt, dessen Stiftreihen außerordentlich zahlreich sind, und entwirft man eine Statistik der Stellen, wo sie die nacheinanderfolgenden Reihen passiert, so wird man finden, dass alle Werte der Abszissen annähernd gleich häufig vorkommen; sie sind gleich wahrscheinlich, und diese Behauptung bezeichnet hier eine objektive vom Menschen unabhängige Tatsache. Im Beispiele (2) läßt sich der Ort, welchen die in bestimmter Richtung hineingeschleuderte Kugel in einem bestimmten Zeitpunkt einnehmen wird, theoretisch voraus berechnen, falls die Gestalt des Gefäßes mathematisch exakt gegeben ist, aber ohneweiters ist ersichtlich, das

alle Bewegungsrichtungen im Laufe der Zeit gleich häufig vorkommen und dass die Kugel alle Teile des

~~der Stelle, welche jedesmal im anschliessenden Rohre passirt, so wird man finden, dass die Kugel~~

~~das Oberteil [illegible] gleich häufig vorkommen, sie ist gleich oft [illegible] Teile, welche~~

~~[illegible]~~

Gefässes annähernd gleich häufig passiren wird.

Ebenso ist im Beispiele der zusammengesetzten Schwingung (V. Abschn.) die Wahrscheinlichkeit ganz klar definirt als relative Häufigkeit, mit welcher der bewegliche Punkt (innerhalb langer Zeiträume) in einem gewissen Flächengebiete anzutreffen ist, obwohl dabei von einer Variation der die Bewegung bestimmenden Anfangsbedingungen gar nicht die Rede ist.

Es lässt sich nämlich der Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit in ganz analoger Weise auf alle solche unvollständig determinirten („zufälligen" im früher dargelegten Sinn) Erscheinungen anwenden, bei welchen dieselbe Art Elementarvorgang sich (eventuell mit ~~a~~ variablem „Parameter") im Laufe der Zeit immer wieder wiederholt. Bekanntlich beweist die statistische Mechanik, dass derlei Bewegungs-Vorgänge durchaus nicht selten sind; im Gegenteil, es gehören dazu, laut einem Satze von Poincaré, die Bewegungen aller „endlichen" mechanischen Systeme konservativer Art. Sie sind sämmtlich „quasi-periodisch" (in speziellen Fällen exakt periodisch), d. h. dass sich der (beliebige) Anfangszustand im Laufe der Zeit mit beliebiger Annäherung wiederholt. Handelt es sich übrigens um Bewegungen molekularer Systeme, so wird die Häufigkeit gleichartiger Fälle noch durch den Umstand ganz ausserordentlich vermehrt, dass die Individualität chemisch identischer Moleküle für physikalische Erscheinungen gleichgültig ist.

Um die Gesetze des physikalischen Zufalls und den Begriff der objektiven, vom Menschen vollständig unabhängigen Wahrscheinlichkeit noch klarer zu verstehen, wollen wir schliesslich wir noch einen Vorgang näher betrachten, den man geradezu als den vollkommensten Typus dessen betrachten kann, was „zufällig" genannt wird, d. i. den radioaktiven Atomzerfall. Bekanntlich erleiden die Atome des Radiums im Laufe der Zeit eine Umwandlung, indem sie sich durch explosive Abscheidung je eines α Teilchens in Atome der Emanation ~~übergehen~~ transformiren. Dabei lässt sich aber an den Radium Atomen keinerlei progressive Evolution (nach Art des Alterns der Organismen) wahrnehmen. Wann ein beliebiges, gerade ins Auge gefasstes Atom eine Umwandlung erleidet, das ist absolut zufällig, und ~~die Wahrscheinlichkeit~~ es lässt sich das in keiner Weise weder ~~—~~ beeinflussen noch voraussehen. Die Wahrscheinlichkeit ~~das ein Zerfall~~ dass ein solcher Prozess gerade im Zeitraum dt stattfindet, dafür ist ebenso gut für „junge" wie für „alte" Atome, und lässt sich somit mathematisch durch die einfache Beziehung: $W\,dt = \lambda\,dt$ ausdrücken, wo λ eine absolute Konstante ist, welche ~~sich~~ durch keine uns bekannten Agenzien ~~[illegible]~~ verändert werden kann.

Auf Grund des vorher Gesagten kann man nun ohne weiteres ein Modell des in dieser Erscheinung zum Vorschein kommenden Zufalls geben: das öfters erwähnte Gefäß des IV Abschnittes mit der hineingeschleuderten Kugel. Wir bemerkten schon a.a.O., dass für die Kugel eine unveränderliche Austrittswahrscheinlichkeit besteht, und man braucht nur die Größe derselben gleich der radioaktiven Umwandlungskonstante zu setzen: $\lambda = \frac{wc}{4V}$. Hätten wir eine große Anzahl derartiger Gefäße von ~~gleicher~~ gleichem ~~Größe~~ Volumen und würden in jedem derselben eine solche Kugel in anderer Richtung in Bewegung gesetzt, so würden die beiden in Rede stehenden Ereignisse — Heraustritt einer Kugel aus einem der Gefäße und Abschleuderung eines α-Teilchens aus einem der Radium-Atome (von gleicher Anzahl) in vollständig analoger Weise vor sich gehen.

Selbstverständlich glaube ich nicht, dass die Radium Atome wirklich einen derartigen Bau besitzen, aber es kommt uns nur auf die prinzipielle Möglichkeit der Konstruktion eines ~~derartigen~~ rein physikalischen Modells des „geregelten" Zufalls an. Sie beweist jedenfalls, dass der scheinbare Widerspruch, welchen die im II Abschnitt aufgeworfene Frage (2) betonte, in Wirklichkeit nicht besteht, und dass der Zufall — in dem in der Physik gebräuchlichen Sinne des Wortes — sehr wohl durch exakt definierte, gesetzmäßige Ursachen hervorgebracht werden kann.

Naturgemäß spielt diese Art Zufall die maßgebende Rolle in der Welt der Moleküle, und es gibt manche hierhergehörige Erscheinungen, wie z.B. die Brown'sche Molekularbewegung, welche das Wesen ~~der Zufälligkeit~~ desselben in äußerst anschaulicher Weise erkennen lassen. Man könnte vielleicht, um solche Fälle den durch ~~Wir~~ willkürliches Eingreifen eines Organismus verursachten gegenüber zu stellen, von „molekularem" und „physiologischem" Zufall sprechen; diese ~~Arten~~ beiden Arten werden nicht auch oft zu komplizierteren Zufallserscheinungen verketten.

Wenn beispielsweise ein Draht durch wachsende Spannung, eine Hohlkugel durch inneren Über-Druck beansprucht wird, so sagt man, der Ort wo ein Bruch stattfindet, die Form der Bruchstücke, ~~usw.~~ hänge vom Zufall ab. Die wirklichen Gründe können kleine Ungleichförmigkeiten der Dicke u. dergl. bilden, welche indirekt auf den physiologischen Zufall bei Herstellung des betreffenden Objektes zurückzuführen sind. Aber auch wenn diese durch genügend große Sorgfalt, entsprechende maschinelle Vorrichtungen beliebig klein gemacht sind, bleiben zufällige Ungleichförmigkeiten im Gefüge des Materials, welche vom molekularen Zufall herrühren. Wird beim Gusse der Hohlkugel auch noch so vorsichtig verfahren, es müssen derartige Ungleichförmigkeiten eintreten. Das Erstarren beruht nämlich auf der Bildung von Krystallisationskernen in der unterkühlten Schmelze; die Zahl und Anordnung derselben werden aber außer von gesetzmäßigen Einflüssen ~~wie~~ (Geschwindigkeit der

Abkühlung u. dergl.) in ausschlaggebender Weise vom molekularen Zufall bestimmt; der letztere ist somit für die faktisch entstehende mikrokrystallinische Struktur des Stückes verantwortlich, von welcher die Festigkeitseigenschaften abhängen. Dass hier zufällige Molekularkonstellationen so markante Folgen nach sich ziehen, beruht nebstbei bemerkt, wieder darauf, dass es sich dabei in letzter Linie um Überschreitungen labiler Gleichgewichts-Zustände handelt.

Auf die weiter sich aufdrängenden Fragen, ob sich alle Zufallserscheinungen auf die obigen zwei Typen zurückführen lassen, und inwiefern vielleicht im Grunde genommen auch der „physiologische" im „molekularen" wurzelt, wollen wir nicht weiter eingehen. Überhaupt sei nochmals wiederholt, dass unsere Studie durchaus nicht eine erschöpfende Analyse aller mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff zusammenhängender Probleme geben sollte. Es scheint uns aber ein auch für den Philosophen äusserst wichtiges Ergebnis zu sein, wenn sich auch nur auf einem beschränkten Gebiet — dem der mathematischen Physik — zeigen lässt, dass der Begriff der Wahrscheinlichkeit, in der üblichen Bedeutung eines (gesetzmässigen) Häufigkeitswertes (zufälliger Ereignisse) eine strenge objektive Bedeutung besitzt, dass man den Begriff und die Genese des Zufalls genau präzisieren kann, auch wenn man am Determinismus festhält, und dass sich dabei das Gesetz der grossen Zahlen nicht als ein mystisches Prinzip und nicht als rein empirischer Erfahrungssatz, sondern als ganz einfache mathematische Folge der speziellen Form ergibt, welche in derlei Fällen den kausalen Zusammenhang darstellt.

Vielleicht ist es nicht überflüssig schliesslich noch zu bemerken, dass im Sinne dieser Auffassungsweise der Wahrscheinlichkeitsrechnung natürlich nicht der Wert eines von den sonstigen Naturerkenntnissen unabhängigen, neuen Forschungsprinzipes zukommt, da sie ja nur eine vereinfachende, statistische Schematisierung gewisser in der Natur sehr häufig auftretender funktionaler Zusammenhänge bildet, deren exakte Untersuchung infolge grosser Kompliziertheit sehr erschwert ist. Bei der charakteristischen Entwickelung der heutigen Physik im Sinne einer Auflösung der physikalischen Erscheinungen in „verborgene" Teilereignisse spielten Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit eine wichtige Rolle als anschauliche, abkürzende Hilfsbegriffe, könnten aber zur Not auch vollständig entbehrt werden, indem sich jene schematisierenden Methoden durch exakt statistische Berechnungen vertreten lassen sollten.*) Die hier skizzierte Theorie macht uns allerdings auch den Grund begreiflich, warum die Anwendung jener Begriffe unter Verschleierung der Details der funktionellen Zusammenhänge doch hinreichend genaue Endergebnisse zu liefern pflegt, und wir verstehen, dass sie namentlich im Gebiet solcher empirischer Wissenschaften, wo eine exakte mathematische Untersuchung der Teilereignisse ausgeschlossen ist, ein unschätzbares Hilfsmittel bildet.

*) Darin besteht wohl der wesentliche Unterschied zwischen der kinetischen Gastheorie (Maxwell, Boltzmann u. A.) und der statistischen Mechanik (Gibbs), dass sich erstere auf grosse, zwar recht plausible aber nicht exakt bewiesene Zufalls- und Wahrscheinlichkeits-Ideen stützt, während letztere (wenigstens im Prinzip, wenn auch nicht ganz in der Durchführung) unter Vermeidung derselben auf exakt statistische Methoden aufgebaut ist.

Hygiène Personnelle

et

Notions élémentaires

1918 – 1919

XXIX

Über den Begriff des Zufalls und der objektiven Wahrscheinlichkeit in der Physik.

~~Infolge des in den letzten 100 Jahrzehnten immer~~

Der innerhalb des letzten Jahrzehnts allgemein anerkannte Sieg der kinetisch atomistischen Vorstellungsweise äußert sich heutzutage in der Tendenz, sämtliche Gesetze der genauen Physik* auf statistische Gesetze zurückzuführen, wobei es sich um eine bedeutende Arbeit handelt. Die kinetische Gastheorie betreffs der Gesetze hat heute in der theoretischen Physik die Wahrscheinlichkeitsrechnung die Forschungsmethode unbestritten die erste Rolle übernommen.

Doch ist der kolossale Ausdehnung des Anwendungsgebietes der Wahrscheinlichkeitsr. nicht von einer entsprechenden kritischen Vertiefung der Grundlagen begleitet gewesen; man hat sich wenig Mühe gegeben, die Bedingungen zu präzisieren, von denen die Anwendbarkeit der W. R. abhängt und den Eisen Grund d. Anwendbarkeit d. WR zu verstehen und die beschränken sich meist auf ein instinktives Wahrscheinlichkeitsgefühl, welches die in der Wissenschaft herrschende Kritiklosigkeit nicht recht faßt.

Als kleiner Beitrag zu diesem Thema möchte ich zu einer eingehenden Untersuchung der Mathematiker mögen die nachfolgenden Bemerkungen aufgefaßt sein, welche nicht eine endgültige Aufklärung sondern bezwecken möchte ich im Folgenden einige Gedanken niederschreiben, die ich mir diesbezüglich gebildet habe, wobei ich natürlich nicht im Sinne habe dieses ganze Problem endgültig aufzuklären sondern eine Anregung zu eingehenden Untersuchungen der Mathematiker zu veranlassen oder anregen möchte.

* Wie ich im Vorhinein bemerken möchte, bedürfen noch diese Bemerkungen vielfach mit Poincaré's Ausführungen die wohl das Wichtigste bilden, was über diesen Gegenstand bisher gesagt wurde.

~~Vielfach wurde schon die Frage aufgeworfen: Wenn man den Zufall als~~

Die Frage, auf welche Ereignisse sich der Begriff des Zufalls der WR bezieht, wird wohl allgemein dahin beantwortet: auf diejenigen deren Eintritt vom Zufall abhängt. Die Unterscheidung dieses letzteren Begriffes ist also jedenfalls das Primäre. Die Einführung des Zufalls in die theoretische Physik wird dadurch im Einfachen Widerspruch in sich. Damit hängen die oft aufgeworfenen Fragen zusammen: Wie ist es möglich, daß der Zufall, wenn man darunter etwas gesetzloses Wirkendes versteht, in der rein deterministischen Spekulation der theoretischen Physik eine Rolle spielen kann? Wie ist möglich daß der gesetzlose Zufall und die Wahrscheinlichkeitsregeln befolgt? Die Antwort lautet gewöhnlich: Allerdings meint man in der Wissenschaft, daß man zwar den gesetzmäßigen Kausalzusammenhang von Ursache und Wirkung eingesehen hat, und als Zufall die uns unbekannten und wegen mannigfaltiger Komplikation nicht erkennbaren Teilursachen bezeichnet. Damit wird der erste Widerspruch behoben. Auch dann bleibt aber die zweite Frage ungelöst, wieso eine Berechnung der Wirkungen unbekannter Teilursachen überhaupt möglich ist.

Die mannigfaltigen philosophischen Analysen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs geben darüber gar keinen Aufschluß. Überhaupt handelt es sich den Philosophen dabei meist um etwas ganz anderes als den Physiker. So entwickelt die Wahrsch. Theorie auf der Grundlage der Zukunftswelt in seinen Grundlagen d. W. R. die Ansicht, daß man nur von der Wahrscheinlichkeit unbestimmter Aussagen (nicht aber von den W. möglichen Ereignissen) sprechen kann und führt den Wahrscheinlichkeitsgrad einer solchen Aussage auf ihren Wahrheitswert zurück, welch letzterer in analoger Weise definiert wird wie die übliche Wahrscheinlichkeit bei ihr. Indem so die Wahrscheinlichkeit einer Aussage in rationeller Weise definiert wird, wird in der formellen Darstellung der Logik wohl ein Fortschritt erzielt, doch sind die Fragen, die jenen Aussagen zu Grunde liegenden objektiven Tatsachen gar nicht berührt.

Sie gebraucht also einen so vieldeutigen (wie Reiming treffend bemerkt) Begriff ~~aber allerdings~~ in einem sehr eingeschränkten Sinne, welchem ~~die~~ Philosophen wie Reiming vielleicht lieber den Terminus Wahrscheinlichkeitsgrad mag? beilegen würden — doch! Es verhält sich damit ähnlich wie mit vielen anderen Begriffen, wie z.B. Kraft, Arbeit, Energie, Wärme usw., welche der Physiker in wesentlich anderem Sinne gebraucht als dies im gewöhnlichen Leben üblich ist. ~~Das ist wohl auch~~

~~Übrigens dürfte es keine~~

Ich bin mir wohl bewusst, dass dies im Gegensatz zu der traditionellen Auffassung steht welche unbekannte Ursachen (ein teilweiser) als wesentlichen Kennzeichen ansieht, (vgl. auch Poincaré p. 31) wie Begriff d. Zufalls u. d. Wahrscheinlichkeit für uns Menschen dunkel und trüben sind

darum sei ~~bemerkt~~ (bemerkt: als Beispiel für unsere Behauptung)

sagt doch z.B. Poincaré: „Ein allwissender Gott würde

Wir pflegen um die Vertreter der herkömmlichen Auffassung die Tatsache zu erklären, dass eine Berechnung (der Wirkung) unbekannter Ursachen möglich ist? Sie berufen sich auf das „Gesetz der großen Zahlen" als eine (empirische) unumstößliche ursprüngliche Prinzip. So sagt z.B. Timerding p. 162: „... die unverbrüchliche Kausalität in allem Naturgeschehen mag wohl aufrecht erhalten werden, sie reicht aber nicht hin um die Regelmäßigkeit des Weltgeschehens vollständig zu erklären. Es gehört vielmehr die Tatsache hinzu, die wir als Gesetz der großen Zahlen bezeichnen und die besagt, dass die Unregelmäßigkeiten, die somit durch die zufälligen Ursachen in die Welt hineingetragen werden, in dem Gesamtergebnis sich ~~verstreuen~~ verschwinden. ... Unser Verstand strebt allerdings dagegen, ein solches Prinzip nur deshalb anzunehmen, weil hier und dort eine Regelmäßigkeit besteht, vielmehr drängt es dahin auch einen inneren Grund für einen solchen Zustand zu finden. Ein solcher ~~der~~ innerer Grund lässt sich aber nicht ermitteln. ..."

Das ist wohl eine ganz erfreuliche Lösung und man sind trachten, einen andern Ausweg aus dem Dilemmazustand.

Poincaré hat bemerkt, dass es auch in der (strikten) Mathematik einen Zufall gibt, dass z.B. die Häufigkeit der ~~gerade~~ Zahlen 1, 4, 3 ... an der letzten Stelle der Zahlen ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ (bekannten) einer Logarithmentafel dem gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsgesetz folgt. Wird sich der Mathematiker damit begnügen ~~[illegible]~~ hierin einen (unbegründeten) ~~[illegible]~~ Gesetzmäßigkeit anzuerkennen? Sollte der Zufall in der Physik

Nöthe bemerkt ~~[illegible]~~ in diesem Falle

Eigentlich setzt sich die Ursache aus zwei ~~[illegible]~~ Vorgängen zusammen: wenn man sich den Schwerpunkt O und die drei Kanten ~~[illegible]~~ (in der so erhaltenen Projektion) auf die Horizontalebene projiziert, sieht man dass die Entfernung ~~[illegible]~~ OE für die Endwirksamkeit maßgebend ist, mit welcher das Umfallen erfolgt, die Richtung des Vektors OE ~~[illegible]~~ hängt auf die Kantenlinien für die Zahl ~~[illegible]~~ welche (oben auf) ~~[illegible]~~ zu liegen kommt. ~~[illegible]~~

(in einer Ecke E zusammenstoßen)

III

Ein Einwand scheint mir darin zu liegen dass ~~[illegible]~~ die oben erwähnten Definitionen des Zufalls (als unbekannter Ursache u. dergl.) viel zu weit zu sein. Als Leverrier ~~[illegible]~~ bemerkte, dass die Bewegung des Uranus ~~[illegible]~~ nicht genau mit der Voraus berechnung übereinstimmte, sagte er nicht: das ist Zufall ~~[illegible]~~! — Wir haben keine Ahnung, wann ~~[illegible]~~ eine magnetische Störung ~~[illegible]~~ stattfinden wird, halten das (Gewitter bestehen) aber doch durchaus nicht für eine Sache des Zufalls. Es fehlt in diesen Beispielen ein ganz wesentliches Merkmal desjenigen, was man

*) Gruber sagt „unbekannte und verborgene Umstände". ~~[illegible]~~ Es ist wohl nicht recht klar, was mit „verborgen" ~~verstanden~~ gemeint ist soll und wie der Wahrheit erkannt wird, wenn der Umstand selber unbekannt ist. Vielleicht ist das aber eine ~~[illegible]~~ instinktive Vorahnung der Kollektive, die wir später besprechen werden

Dieser populäre Zufallsbegriff ~~genügt sich~~ genügt jedoch nicht als Grundlage eines exakt definierbaren Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Von einem mathematischen Wahrscheinlichkeitsgesetz kann betreffs einer Grösse y erst dann gesprochen werden, ~~wenn 1). dieselbe von einer oder mehreren zufälligen Ursachen x abhängt, 2).~~ wenn die Kausal-Relation $y = f(x)$ sich (außerdem noch) durch eine spezielle Eigentümlichkeit auszeichnet, nämlich wenn die Verteilung der y, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, unabhängig wird von der Art der Verteilungsfunction $\varphi(x)$, welche die Wahrscheinlichkeit der x bestimmt — vorausgesetzt, dass letztere einen regelmäßigen Verlauf habe.

Eine hierzu hinreichende Bedingung ist eine solche Beschaffenheit der Function $y = f(x)$, dass sich für jeden innerhalb des Schwankungsbereiches Ω gelegenen x_0-Wert ein solches, im Verhältnis zu Ω äusserst kleines Δx angeben lässt, dass die Function $y = f(x_0 + \varepsilon \Delta x)$ sämmtliche y Werte (innerhalb gewisser Grenzen) durchläuft, sobald die Variable ε die Werte von 0 bis 1 durchläuft. Für jedes x gibt es dann also einen kleinsten Bereich Δx, welchem eine Variation über alle Werte y entspricht. Die Grössen Δx, welche mit der Grösse zusammenhängen, die wir früher Ausgleichsgebiet genannt haben, definieren gewissermaßen die Struktur der Wahrscheinlichkeitsfunction $f(x)$; je „feinkörniger" dieselbe ist, d. h. je kleiner diese Δx sind, desto geringer sind die Anforderungen, die man betreffs der Gleichförmigkeit der primären Verteilungsfunction φ stellen muss, um eine von der Art derselben unabhängiges Resultat zu erhalten.

*) Siehe z.B. E. Borel, Le Hasard p. 15, Alcan Paris 1914.

Im Gegensatz hierzu interessiert sich die Physik nicht für Aussagen und (für subjektive) Vermutungen, sondern für die objektive Wahrscheinlichkeit des Eintretens bestimmter Ereignisse. Aus diesem Grunde muß der Physiker jede Wahrscheinlichkeit, die er (und, soweit die Anwendung in der theoretischen Physik in Betracht kommt alle W.) gemäß den betrachten welche den Zufall als „unbekannte Ursache" auffaßt. Die physikalische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann nur von den Bedingungen abhängen, welche zu ihrem Zustandekommen beeinflussen, aber nicht von dem Grade unseres Wissens.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung (der kinetischen Gastheorie) wurde ihre Berechtigung (behalten, auch dann, wenn wir die Anschauung der Molekül, deren Anfangslage genau gemessen kann würde und im Stande wären, deren Bewegung mathematisch (exakt) zu verfolgen. Sie wäre dann noch immer ein (mathematisches) Hilfsmittel wie die objektivste Multiplikation oder die Benützung vierstelliger Logarithmentafeln neben der (exakten) Multiplication.

Wenn ein treffendes Beispiel des Zufalls zu finden im gewöhnlichen Leben oder in unserer Wissenschaft (als Zufall bezeichnet) dient, und zwar läßt sich dieses kurz in die Worte fassen: Kleine Ursache, — große Wirkung! Poincaré gibt zwar zwei Alternativmerkmale des Zufalls an: Komplexheit vieler (solcher hinsichtlich unbekannter) unabhängiger Ursachen oder gegenseitige Einwirkung zweier für gewöhnlich unabhängiger Erscheinungen (bedeutungslos), doch glaube ich das sämmtliche derartige Fälle sich (unter jenen beiden Gesichtspunkten) einordnen lassen.

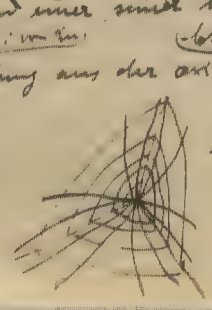
Besonders charakteristisch tritt jenes Merkmal in allen Fällen auf, wo es sich um einen Zustand labilen Gleichgewichts handelt. Denken wir uns einen idealen Würfel auf eine Ecke gestellt, so ist die kleinste Veränderung des Schwerpunktes (aus der Vertikalen) schon dafür entscheidend, auf welche der drei unter sich zusammenstoßenden Flächen der Würfel zu liegen kommen wird. Dann hängt vom Zufall ab.

Auch ein solcher Zufall entzieht sich jeder Berechnung und kann auch niemals die Grundlage zur Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden. Angesichts des Effekts kann man das Ereignis nicht voraussagen, denn wenn man die Lage und Größe mit einer gewissen Genauigkeit kennt, kennt man sie aber, so ist der Effekt mit Sicherheit vorauszusehen und es bleibt kein Raum für Wahrscheinlichkeit übrig.

Mathematisch ausgedrückt, hängt die Wirkung y (die Wirkung) von der Ursache x (auf der Stirnfläche des Würfels) derart ab, daß die Funktion $y = f(x)$ in dem betrachteten Werte x_0 eine Singularität aufweist.

Der einer Wahrscheinlichkeitsberechnung entgegenstehende Zufall zeichnet sich durch ein weiteres wesentliches Charakteristikum aus: (ein Alternativ: die Wirkung nahezu unabhängig von der Ursache) Kurzschlußartige Plötzlichkeit des Effektes, (unabhängig von der Größe der Ursache) ideal ebenso kurzschlußartig.

Zieht man jenen Würfel in der vorher besprochenen Lage aus der Höhe eines Meters auf eine elastische Unterlage fallen, so ändert sich der Vorgang in wesentlicher Weise. Der Würfel prallt ab, steigt empor und fällt wieder ab und wiederholt diese Vorgänge mehrmals mit abnehmender Amplitude und unter Annahme verschiedener Lagen, bis er auf irgend einer einer sechs Seiten liegen bleibt, auf welcher er schließlich zu liegen kommt, muss natürlich von der jeweiligen Anfangslage d. i. von der Stellung abhängen, aber die Funktion, welche diese Abhängigkeit ausdrückt wird so beschaffen sein, daß



bei kontinuierlicher Veränderung der zwei Variablen x, y (die Anfangslage definierend) in raschem Wechsel Gebiete durchschritten werden, welche allen möglichen Endlagen entsprechen, und zwar so dass bereits innerhalb

Die Wahrsch. R., welche mit Beginn ihrer Entwickelung [illegible] mit Erfolg auch [illegible] sozialen und biologischen Vorgänge angewendet wurde, [illegible] sonst [illegible] zugänglichen [illegible], hat noch in den letzten Zeiten ein überaus wichtiges Anwendungsgebiet erschlossen: die Physik, und zwar ist damit nicht die seit Gauß' Zeiten als eigene Disziplin entwickelte Theorie der Beobachtungsfehler gemeint, sondern gerade das eigentliche System der theoretischen Physik, [illegible] zum ersten Mal von Clausius und Maxwell (um 1860) als [illegible] mathematisches Hilfsmittel in die kinetische Gastheorie eingeführt, hat die W.R. nach einer Periode der Stagnation infolge des modernen [illegible] und dadurch [illegible] Theorien der Materie, der Elektronik, Radioaktivität und Strahlungstheorie eine grundlegende Bedeutung gewonnen, und bildet heute das unentbehrliche Gerüst der [illegible] Forschung, auf dem Gebiete der theoretischen Physik [illegible] bis zur Wissenschaft zum Durchbruch gelangten eine führende erste Rolle spielt. Entspricht doch ihr Ziel durchaus der heute herrschenden Tendenz, sämmtliche Zweige der Physik* auf Statistik verborgener Elementarereignisse zurückzuführen, in ähnlicher Weise wie es die kinetische Gastheorie bezüglich der Gasgesetze tut.

Trotz dieser immen Ausdehnung d. Anwendungsbereiches d. Wahrsch. R. hat die exakte Analyse der ihr zugrunde liegenden Begriffe nur geringe Fortschritte gemacht; es gilt wohl noch heute der Satz, daß keine weite mathematische Disziplin auf so unklare und schwankende Grundlagen aufgebaut ist. Über die Grundfragen nach der Subjektivität oder Objektivität der Wahrscheinlichkeitsbegriffes (nach der Definition der Gesetzlichkeit u.ähnl.) sind von verschiedenen Autoren in ganz verschiedener Weise beantwortet.

Insbesondere ist auch eine (allgemein und mathematisch) exakte Präzisierung der für die Anwendbarkeit dem Rechnungsmethoden charakteristischen Bedingungen noch immer ausständig, und man pflegt [illegible] mit in diesem Sinne auf ein intuitives Wahrscheinlichkeitsgefühl zu verlassen.

Als kleiner Beitrag zu den erstgenannten Untersuchungen mögen die nachfolgenden Bemerkungen aufgefaßt sein, welche von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Physik ausgehen, in der [illegible] gerade die grundlegenden Schwierigkeiten in besonders krasser Form auftreten. Ich will ausdrücklich betonen, daß [illegible] keineswegs eine allseitige und endgültige Aufklärung des ganzen damit zusammenhängenden komplexes philosophischer Fragen bezweckt [illegible], sondern [illegible] nur einige Leitgedanken hervorgehoben [illegible], welche mir mitunter unentbehrlich die objektive Seite des Wahrscheinlichkeitsbegriffes [illegible] ein wenig mehr [illegible] zu klären scheinen. *)

Das Unbefriedigende der diesbezüglichen Aufhellungen im gewissen sonst [illegible] hochst beachtenswerten neueren Werken hat die Entstehung dieser Studie veranlaßt, welche im übrigen

---

Indem (ohne von Zufall zu sprechen) Zukosinsky definiert: d. Wahrscheinlichkeit (= Wahrscheinlichkeitsgrad) ist das Verhältnis der Anzahl derjenigen Werte der Variablen welche die Aussage verifizieren zur Anzahl aller Werte der Variablen" entwickelt er (meiner Ansicht nach die Grundbegriffe der Statistik, aber nicht den Wahrscheinlichkeitsbegr. im eigentlichen Sinne. Allerdings ist die mathematische Behandlung (hier) die gleiche und vielleicht kann letzteres als Spezialfall des ersten aufgefaßt werden, doch nicht umgekehrt; man kann wohl [illegible] nicht sagen: Die Wahrscheinlichkeit dass ein Monat 31 Tage [illegible] beträgt $\frac{7}{12}$ oder: Die Wahrscheinlichkeit dass ein Planet innerhalb der Erdbahn läuft eine kleinere Entfernung ist $\frac{2}{8}$ (abgesehen von d. Intervalle). Die Wahrscheinlichkeit dass einer der Kämpfer (Soldaten) in Waterloo der englischen Nation angehört war ... . Es fehlt hier das Element des Zufalls welches uns allein berechtigt von Wahrscheinlichkeit zu sprechen, und darauf kommt es in unserem Falle gerade an.

Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze in der Physik.

von

M. v. Smoluchowski

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche seit Beginn ihrer Entwickelung mit grössem Erfolg hauptsächlich ~~auf~~ in dem sonst der mathematischen Behandlung wenig zugänglichen Bereich sozialer und biologischer Vorgänge angewendet wurde, hat noch in den letzten Zeiten ein überaus weitgehendes Anwendungsgebiet erobert: die Physik. Und zwar ist damit nicht etwa die seit Gauss' Zeiten als eigene Hilfs-Disziplin ausgebildete Theorie der Fehlerausgleichung bei physikalischen Messungen gemeint, sondern gerade das eigentliche Gerüst dieser Wissenschaft, das System der ~~mathematischen~~ theoretischen Physik. Zum ersten Male um 1860 von Clausius und Maxwell als eigenartiges mathematisches Hilfsmittel in die kinetische Gastheorie eingeführt, ~~hat~~ ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung nach einer ~~vor~~ vorübergehenden Periode der Stagnation [infolge des schliesslichen Sieges der atomistischen Anschauungsweise eine für die Physik ganz grundlegende Bedeutung gewonnen und bildet] heute ~~das~~ zu einem ganz unentbehrlichen Werkzeug bei Forschungen auf dem Gebiete der modernen Theorien der Materie, der Elektronik, Radioaktivität und Strahlungstheorie ~~[illegible]~~ genommen. Entspricht doch ihr Wesen durchaus der heute ~~[illegible]~~ zur Herrschaft gelangten Tendenz, sämmtliche Gesetze der Physik *) — nach dem Vorbild der kinetischen Gastheorie — auf Statistik verborgener Elementarvorgänge zurückzuführen, wobei die „Einfachheit" ~~in ähnlicher Weise~~ derselben als sekundäre Folge des Wahrscheinlichkeitsgesetzes „der grossen Zahlen" aufgefasst wird. ~~wie es die kinetische Theorie auf einem beschränkten Gebiete, betreffs der Gasgesetze schon lange tut.~~

Trotz dieser immen Ausdehnung des Anwendungsbereiches der Wahrscheinlichkeits-Rechnung hat die exakte Analyse der ihr zugrunde liegenden Begriffe nur geringe Fortschritte

*) Von dieser Tendenz sind bisher nur die Lorentz'schen Gleichungen der Elektronentheorie, ~~[illegible]~~ das Energiegesetz und Relativitätsprinzip unberührt geblieben, aber es ist wohl möglich, dass im Laufe der Zeit auch hier statistische Regelmässigkeit an Stelle exakter Gesetzesform treten dürfte.

Die Frage, welche Ereignisse in den Erkenntnisbereich der W.-R. fallen, wird wohl allgemein dahin beantwortet: auf diejenigen deren Eintritt vom Zufall abhängt. Die Untersuchung d. letzteren Begriffs ist also jedenfalls das Primäre, und wir werden uns vor Allem klar zu machen suchen, wodurch ein Vorgang des „Zufalls" charakterisiert wird, was der Zufall bedeutet wird.

Damit hängen zwei Probleme zusammen, deren Schwierigkeit in den exakten deterministischen mathematischen Spekulationen der theoretischen Physik besonders fühlbar macht, nämlich die Frage: Wie ist es möglich, dass sich der Effekt des Zufalls berechnen lässt, dass also zufällige Ursachen gesetzmäßige Wirkungen haben? und die ebenso bemerkenswerte Gegenfrage: Wie kann der Zufall entstehen, wenn alles Geschehen nur auf gesetzmäßige Naturgesetze zurückzuführen ist? oder mit anderen Worten: Wie können gesetzmäßige Ursachen eine zufällige Wirkung haben?

Betrachtet man in populärer Weise den Zufall als die Negation des Gesetzmäßigen, so sind diese Widersprüche ganz vollständig unüberbrückbar. Ein solcher Zufallsbegriff ist jedoch mit dem in der heutigen Wissenschaft herrschenden Determinismus unvereinbar und ist der Zeitgeist zu betrachten. Nun pflegt man sich die Sache durch die Annahme zu erklären, dass der zwischen Ursache und Wirkung ein gesetzmäßiger Kausalzusammenhang besteht, dass aber dessen Art für uns wegen der Komplikation der Erscheinung nicht erkennbar ist, wodurch der Schein der Gesetzlosigkeit entsteht. In diesem Sinne wäre der Zufall als eine uns unbekannte Teilursache zu bezeichnen. Vielleicht ist damit auch Reinings Auffassungsweise, nämlich der Zufälligkeit die Tatsächlichkeit von etwas „Nicht-Notwendigem" bedeuten würde; dabei soll (näher verwandt als es den Anschein hat) nämlich die negierte Notwendigkeit entweder eine innere oder äussere (relativ zu einem Komplex von Objekten) sein. Wenn man nun vom deterministischen Standpunkt aus Ursache und Wirkung als immer durch innerlich notwendige Teilereignisse verkettet ansieht, kann von Nichtnotwendigkeit nur in relativem Sinne die Rede sein: insofern die Notwendigkeit äusserlich nicht erkennbar ist.

Diese herkömmliche Darstellungsweise könnte man allenfalls noch als Beantwortung der zweiten der oben angeführten Fragen gelten lassen, aber es bleibt die erste Frage ungelöst, wieso erkennbare Teilursachen möglich ist.

Die mannigfaltigen philosoph. Analysen d. W.-begriffs geben hierüber keinen Aufschluss. Überhaupt handelt es sich dabei um etwas ganz anderes als dem Physiker und Naturwissenschaftler. Er richtet seine Aufmerksamkeit vor Allem auf die subjektiven psychologischen Momente des Wahrscheinlichkeitsgedankens, analysiert die erkenntnistheoretische Deutung desselben, unterscheidet in verschiedener Weise solche Aussagen, welche sich in das System der formalen Logik einordnen lassen, fragt aber nicht nach der Art der Tatsachen, die demselben zu Grunde liegen.

Von einer mathematischen Wahrscheinlichkeit für den Wert y kann erst dann gesprochen werden, ~~wenn die Funktion y = f(x) so beschaffen ist, dass~~ ~~die Eigenschaft ausschliesst, dass~~ innerhalb des „Variabilitätsbereiches" von x

die Wahrscheinlichkeit von y unabhängig wird von der Wahrscheinlichkeit, ~~mit~~ der x bestimmt, sofern innerhalb gewisser Grenzen (umfassend) Art der Funktion welche die = vorausgesetzt dass letztere einen sanften regelmässigen Verlauf hat

Eine hierzu hinreichende Bedingung ist die nachfolgende:

wenn innerhalb des Variabilitätsbereiches von x kein zusammenhängendes endliches Intervall existiert, in welchem nicht für jeden Wert y (innerhalb eines gewissen Bereiches) eine Menge ~~[illegible]~~ (diskreter) dazugehöriger x Werte x_1, x_2, x_3, x_4 vorhanden ist, welche

Letzteres ist natürlich nur dann möglich falls

für jeden Abschnitt $x \ldots x+\Delta x$ (wobei Δx als ~~[illegible]~~ klein im Verhältnis zum ganzen Variabilitätsbereich von x vorausgesetzt wird)

~~[illegible]~~

$$y + \Delta y = f(x + \vartheta \Delta x)$$

für jedes x

so dass, wenn x festgehalten und Δx, ϑ die Werte von 0 bis 1 durchläuft, y alle Werte zwischen gewissen Grenzen ~~[illegible]~~ durchläuft

y_1 und y_2 annimmt

Natürlich ist dann ~~für alle~~ umgekehrt jeder Wert y ~~[illegible]~~ durch ~~[illegible]~~ eine Menge verschiedener x realisierbar, ~~so dass jeweils~~

~~Im Allgemeinen~~ also ist die inverse Funktion in vielen Fällen vielbeutig; dies ist die Wirkung kann durch ~~[illegible]~~ verschiedene Ursachen hervorgebracht sein Kontrollstellen

~~Wahrscheinlichkeitsrechnung~~ ~~[illegible]~~

~~Die~~ Derartige Funktionen sind leicht aufstellbar.

~~$y = \sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ für genügend kleine Werte α. Es handelt hier um Verteilung~~ Wahrscheinlichkeitsverteilung ~~[illegible]~~

Als typische Fälle wie hervorgehoben

Theoretisch interessant ist die physikalische Verdeutlichung jener Bedingung nur ~~wahrscheinlich~~ in folgenden zwei Fällen:

I). Das Gallton'sche Brett

Das Einzelereignis ist also nicht vorauszusehen, wohl aber die Verteilung der Ereignisse bei fortgesetzter Wiederholung ~~[illegible]~~ Ein solcher Zufall eignet sich zur Ordnung.

Andrerseits muss man aber zugestehen, dass ~~[illegible]~~ das eigentliche Wesen des Zufalls dadurch nicht erschöpfend dargestellt wird, dass man bereits ~~[illegible]~~ auf der Annahme einer primären Verteilungsfunktion φ die zufälligen Fehler der Ursache, von die ihrerseits ein „regelmässiger Verlauf vorausgesetzt wird.

und der Schützen

· Wenn die Scheibe still steht, kann von Zufall keine Rede sein (vorausgesetzt

Der Ausdruck Zufall wird zur Bezeichnung einer ~~[illegible]~~ spezifischen Art von Kausal-Relationen gebraucht.

eines äußerst kleinen Variabilitätsbereiches der Herstellung (in Bezug auf die Letztere), die den Zahlen 1–6 entsprechenden Strecken ungefähr flächengleich sind. Würde man nun von dem Fehlerlosen, der durch menschliche Hilfsmittel in irgend einer Weise orientiert, so ist klar, dass trotz jener Sorgfalt bei der Herstellung einige Fehler unvermeidlich sind. Den Bereich dieser unvermeidlichen Fehler nennen wir den Variabilitätsbereich Ω, und man darf wohl annehmen, dass die Funktion welche die Häufigkeit jener Fehler bei wiederholter Ausführung des Versuches darstellt, einen regelmäßig „glockenförmigen" Charakter besitzt. Ist der Bereich Ω klein im Vergleich zum resultierenden Wertbereich für alle unvermeidlichen Variabilitätsbereich Ω, so ist die Wahrscheinlichkeit der Zahlen 1–6 gleich nun, unabhängig von der Art der speziellen Herstellung und von der individuellen Variationsfunktion φ.

Somit sehen wir, dass die Wirkung des Zufalls, wie sie für die Herstellung eines bestimmten Gesetzes resultieren kann, ohne Rücksicht auf die spezielle Form jener primären Verteilungsfunktion φ (es kann sogar die Form der Funktion φ mit der Zeit veränderlich sein!) mit welchen sich Reihen über Ereignisse befassen, die eine Erklärung finden, womit der erste der eingangs aufgeworfenen Widersprüche*) seine Aufklärung findet.

*) Siehe Borel p. 15 (einige zentrale Lieben:)

Dieser Umstand findet einen Ausdruck in der Aussage: die Theorie der Zufallsfehler ist nicht Erklärung einer Erscheinung, sondern die Ermittelung derselben auf Grundlage der als bekannt angenommenen Wahrscheinlichkeiten eines damit zusammenhängenden (aber anderen) sicheren Ereignisses.

Der zweite der oben dargelegte Umstand erklärt wie der Effekt des Zufalls einer in allen Einzelheiten unerklärlichen Ursache gänzlich sich kann und klärt die eingangs aufgeworfenen Widersprüche auf.

Noch einfacher als der obige Fall ist das Beispiel der Roulette, an welchem Poincaré (C. de Ph. p.) analoge Betrachtungen anstellt; am besten scheint es mir dasselbe in folgender Weise zu formulieren oder das Beispiel der rotierenden Scheibe. Ob ein Sektor oder ein weißer oder weißer Sektor treffen und hängt vom Zeitpunkt ab wann das Rad stillgesetzt wird, dass die Schnelligkeit einem Schützen als Ziel dienende Man kann aber die Scheibe in so kleinen Sektoren zerlegen, dass die Wahrscheinlichkeit einen weißen oder schwarzen Sektor zu treffen nur vom Flächeninhalt derselben abhängen.

Mag es sich in dem bisherigen Beispiel ausdrücken, aber vom Entschluss bis zur Tat vergeht jedenfalls noch eine unbestimmte in jeweiligen Umständen variable Zeit, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Schuss zur Zeit t losgeht, durch eine (im Bereich von t bis $t+\tau$ von Null merklich verschiedene) Funktion $\varphi(t)$ dargestellt wird, von der man annehmen darf, dass sie keine Unstetigkeitsstellen, unendlich viele Maxima und Minima, aufweist, deren Form aber sonst gleichgültig ist. Bei Entfallen auf den Variabilitätsbereich der Zeit τ genügend viele Rotationen der Scheibe, so wird die Form der Funktion φ ganz gleichgültig und man sieht dann nur kurz von jener Wahrscheinlichkeit auf φ, aber implizite wird betreffs φ doch jene Annahme gemacht. Die Sache würde sich sofort ändern, falls das Zeiger mittels elastischen Kontakten mit der Sektorenscheibe in passender Weise verbunden wäre.

Fassen wir das bisher Gesagte in verallgemeinerter Form zusammen:

Man sagt, dass ein Ereignis y vom Zufall abhängt, wenn es eine solche Funktion einer (eventuell unbekannten oder absichtlich ignorierten) Ursache oder Teilursache x ist, dass das Eintreten oder Nichteintreten desselben von einer kleinen Änderung des x abhängt, [wobei unter „klein" verstanden wird: klein im Verhältnis zum Variabilitätsbereich von x]

Negative Störung?

b) Dieser populäre Begriff des Zufalls ~~ist jedoch zu weit~~ eignet sich jedoch nicht als Grundlage einer bestimmten Wahrscheinlichkeit, ~~[illegible]~~ exakten Definition.

~~Zufällig Größe ist also~~

~~Denn also~~ eine Größe ~~ein Wahrscheinlichkeitsgesetz~~ gesetzt ~~besitzt, heißt in der Sprache der~~ 1), ~~es~~ von zufälligen Ursachen eine oder mehrere abhängt 2), ~~[illegible]~~ eine Konstante Relation die Funktion $y = f(x)$ sich durch eine spezielle Eigenschaft auszeichnet, nämlich wenn

Eine hinreichende Bedingung ist eine solche Beschaffenheit der Funktion $y = f(x)$, dass für jeden innerhalb des Variabilitätsbereiches V gelegenen x_0-Wert innerhalb jedem Intervall y_1, y_2 ~~[illegible]~~ jedes beliebige y ~~[illegible]~~ ein ~~[illegible]~~ Intervall Δx im Verhältnis zu V äußerst klein existiert, für welchen die Relation $y = f(x_0 + \Delta x)$ gilt. ~~[illegible]~~ Wenn also x alle Werte innerhalb ~~[illegible]~~ des Intervalls durchläuft ~~[illegible]~~ das zugehörige y ~~[illegible]~~ kleinsten Bereichs durchläuft.

Die Größe Δx ~~[illegible]~~ Für jedes x gibt es also einen kleinsten Bereich Δx, welchem ein Variation über alle Werte y ~~[illegible]~~ entspricht, die Größe δx ~~[illegible]~~ definiert, ~~[illegible]~~ man könnte sagen, die Struktur der Wahrscheinlichkeitsfunktion ~~[illegible]~~ je kleiner sie sind, desto geringer sind die Anforderungen die man betreffs der Gleichförmigkeit der primären Funktion φ stellen muss, um eine von der ~~[illegible]~~ Art ~~[illegible]~~ unabhängige ~~[illegible]~~ End-Wahrscheinlichkeit zu erhalten.

~~Wie bei unserem Verfahren~~

→ ein solches, (im Verhältnis zu V äußerst klein) Δx sich angeben lässt, dass ~~[illegible]~~ die Funktion $y = f(x_0 + \vartheta \cdot \Delta x)$ sämtliche y-Werte innerhalb gewisser Grenzen y_1, y_2 durchläuft, sobald ϑ ~~die~~ Werte von 0 bis 1 durchläuft.

In dem Beispiel der rollenden Scheibe ~~[illegible]~~ können wir als x die Zeit t ~~[illegible]~~ annehmen zu welcher der Schwerpunkt, als y die Winkelabweichung ~~der Trägerstelle (von einem~~ (von einem bestimmten ~~Durchmesser~~ Radius bis zur φ in der ~~[illegible]~~ Scheibe ebene Trägerstelle gerechnet). Es ist also $\varphi = ct - 2n\pi$

$y = cx - 2n\pi$

wobei c eine sehr große Zahl bedeutet und n immer so gewählt wird, dass y zwischen 0 und 2π beträgt.

~~Es gilt dann offenbar~~ $y = c\left[x_0 + \frac{2\pi}{c}\vartheta\right] - 2n\pi$ Das oben Δx genannte Bereich ist hier gleich $\Delta x = \frac{2\pi}{c}$ und es werden offenbar alle Winkel φ gleichwahrscheinlich wenn dieses Größe klein ist im Vergleich zu V.

Eine andere brauchbare Funktion ist ϑ.

$y = \sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ für genügend kleine Werte α, ~~[illegible]~~ welcher eine ~~[illegible]~~ Wahrscheinlichkeitsgesetz

$W(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$ entspricht

~~$dy = \frac{1}{\alpha}\cos\frac{x}{\alpha}\,dx$~~

II.). Die innerhalb eines starren Gefässes sich bewegende elastische Kugel

III.). Das Boltzmann-Gibbs'sche Gasmodell

IV.

Die Überlegungen mittels welcher wir im Obigen das Wesen des Zufalls charakterisiert und die Gesetzmässigkeit der zufälligen Wirkungen desselben zu erklären suchten

Die oben entwickelten Betrachtungen der Gesetzmässigkeit der Entstehung der Wahrscheinlichkeitsgesetze der Wirkung des Zufalls ist schliesslich noch in Zweifel der Klarheit nicht ganz befriedigend zu nennen:

1). sie setzt voraus (Es wird angenommen), dass die „Ursache" x einer Wahrscheinlichkeitsgesetzes befolgt, also dieser Begriff als etwas Gegebenes vorausgesetzt wird, und beschränkt sich auf die Erklärung der Gesetzmässigkeit der Wirkung, die nur die Unveränderlichkeit des Wahrscheinlichkeitsgesetzes für die Gründe der Wirkung erklärt.

2). Es wird gewisse Eigenschaften der Funktion φ vorausgesetzt, welche wir als „Regelmässigkeit" bezeichnet haben.

Was bedeutet es nämlich wenn wir sagen das die W. (das Eintreten des x durch eine Variable φ) bestimmt ist? Es ist die Verallgemeinerung der Zufälligkeit und der Gesetzlichkeit auf Grund unendlich vieler Spezialfälle (Handhabung beim Aufsuchen der Resultate, Deutung d. allgemeinen Gesetzes) auf Grund man dann, auf dem Grund

Unmittelbar gegeben sind aber nur diskrete Einzelfälle und erst durch Abstraktion jede (Zufälligkeit) Funktion φ zu formulieren. Um die Verteilung der Kugeln experimentell festzustellen würde man in dem vorher in der Figur beschriebenen Apparat die Kugeln unter jedesmal veränderten Anfangsbedingungen in Bewegung setzen und so vorgehen, dass man eine grössere Anzahl n Kugeln unter jedesmal verändertem Anfangsbedingungen in Bewegung setzt und eine Statistik des uns interessierenden Endresultates anfertigt. Dabei ist es theoretisch möglich, dass auch für beliebig grosse n ein von normalen abweichendes Resultat erhalten wird, falls die betreffenden x Werte entsprechend gewählt werden. Im Klarsten übersieht man dieses Verhältnis der rotierenden Scheibe: im Allgemeinen wird dieselbe von den Strahlen ungefähr gleichförmig überdeckt sein, falls in beliebigen Zeitintervallen genügend kurzer Zeit genau gleich der Umlaufzeit τ sein oder wenigstens sie abgeben wird. Würden aber die Intervalle sämtlich τ, 2τ, 3τ, 4τ usw. betragen so werden sämtliche Treffer auf einen Punkt der Scheibe konzentriert sein (selbst bei beliebig kleinen Intervallen) und in solchen Ausnahmefällen wird die Häufigkeit der x-Wertmenge im Verhältnis zu allen möglichen Werten scheinbar verschwindend klein ist. Und dasselbe dürfte auch in allen analogen Fällen der Fall sein.

Und in analoger Weise sieht man ein, dass unter allen möglichen Intervall-Längen, diejenigen welche mit der vorgegebenen Umlaufzeit kommensurabel sind, nur einen verschwindend kleinen Bruchteil bilden.

*) In Wirklichkeit ist es die ganze Zeit ein irrationaler Teil

Wenn man nun Gesamtwahl verschiedene Intervallängen zählt, so ist es unmöglich, von Ungleichwahrscheinlichkeit, dass man gerade solche treffen wird, welche mit der vorgegebenen Kammerweite (ganz exakt) sind. Allg. $\frac{1}{2}$ je zu 25 Sek/a.

Analoges gilt auch in andern Fällen. Ist z.B. das im Beispiel (2) erwähnte Gefäß die Gestalt eines „mathematischen" Würfels, so ist leicht einzusehen, dass die hineingeschlossene Kugel sich (trotz beliebiger Reflexionen) nur in einer von acht bestimmten Richtungen bewegen kann.

$x\ y\ z$	$x\ y\ -z$	$x\ -y\ z$	$x\ -y\ -z$
$-x\ -y\ -z$	$-x\ -y\ +z$	$-x\ +y\ -z$	$-x\ +y\ +z$

Es genügt aber eine beliebig kleine Abweichung der Anfangsrichtung der Wände, um diese Anordnung (nach ausreichend langer Zeit) zum Verschwinden zu bringen und sämtliche Richtungen des Raumes (für die Bewegung der Kugel) gleichwahrscheinlich zu machen. Wird also nicht ein speziell „ad hoc" mathematisch konstruiertes Gefäß angewandt, so wird durch die Reflexionen eine Gleichverteilung der Bewegungsrichtungen im Raume erzielt. Im Allgemeinen findet letzteres statt.

Das Wort Wahrscheinlichkeit bezeichnet hier also eine objektive, vom Menschen ganz unabhängige Tatsache.

Aber ohne jede Rechnung lässt sich voraussehen, dass alle Bewegungsrichtungen im Laufe der Zeit gleich häufig vorkommen werden und dass die Kugel alle Orte des Gefäßes gleich häufig passieren wird.*)

Bekanntlich zeigt die statistische Mechanik, dass diese Vorgänge durchaus nicht selten sind, im Gegenteil gehören dazu die Bewegungen aller mechanischen Systeme welche gewisse sehr allgemeine Bedingungen erfüllen.

Handelt es sich beispielsweise um Bewegungen molekularer Systeme so wird die Häufigkeit gleichartiger Fälle noch durch den Umstand außerordentlich vermehrt, dass die Individualität gleichartiger Moleküle für den physikalischen Effekt gleichgültig ist.

Natürlich ist ~~auch~~ umgekehrt jeder Wert y durch eine Menge verschiedener x realisierbar, d.h. die inverse Function ist in hohem Grade vieldeutig: dieselbe Wirkung kann durch sehr verschiedene ursächliche Konstellationen hervorgebracht sein.

Beispiele derartiger functioneller Zusammenhänge sind leicht zu geben. So können wir im Fall der rotirenden Scheibe als x die Zeit t annehmen, zu welcher der Schuss losgeht, als y die Winkeldistanz θ in der Scheibenebene (von einem bestimmten Radius bis zur Treffstelle gerechnet). Es ist also: $\theta = ct - 2n\pi$, wobei c eine sehr große Zahl bedeutet und n immer so gewählt wird, dass θ zwischen 0 und 2π gelegen sei. Der im Obigen als Δx bezeichnete Bereich ist hier gleich $\Delta x = \frac{2\pi}{c}$, und es werden offenbar alle Winkel θ gleichwahrscheinlich sein, wenn diese Größe klein ist im Vergleich mit dem Schwankungsbereich der Ursache.

Eine andere derartige Function ist z.B. $y = \sin\left(\frac{x}{a}\right)$ für genügend kleine Werte a, und zwar entspricht derselben eine Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$W(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

Als typische Beispiele, wie die oben dargelegten mathematischen Bedingungen auch ohne Rücksicht auf Art und Ursache der primären Schwankungen physikalisch verwirklicht werden können, seien noch folgende Fälle etwas eingehender besprochen:

Eine andere derartige Function ist z.B. $y = \sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ für genügend kleine Werte α, und zwar entspricht derselben eine Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$W(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

Als typische Beispiele, wie die oben dargelegten mathematischen Bedingungen physikalisch verwirklicht werden können, seien noch folgende Fälle etwas eingehender besprochen:

I). Das Galton'sche Brett. Es besteht aus einem geneigt aufgestellten Brett, in welchem in ~~[illegible]~~ regelmässigen horizontalen Anordnung eine grosse Anzahl Nägel eingeschlagen ist, und zwar derart, dass die Nägel ~~einer~~ jeder Reihe den Öffnungen der zwei benachbarten Reihen entsprechen. Werden nun von einem gegebenen Punkt aus Kugeln von passender Grösse ~~(so dass sie [illegible] zwischen den~~ (so dass ihr Durchmesser wenig kleiner ist als der freie Abstand zwischen zwei benachbarten Nägeln) über das Brett rollen gelassen, so ~~[illegible] an jeden Nagel~~ werden sie infolge der Zusammenstösse mit jenen Nägeln aus ihrer Bahn in unregelmässiger Weise abgelenkt und sammeln sich schliesslich nach Passierung sämtlicher Nägelreihen in den am unteren Brettrande angebrachten Behältern an, so dass die Höhe zu der sie in denselben reichen, direkt als Mass der ~~entsprechenden~~ Wahrscheinlichkeit der betreffenden Lage dienen kann.

Es zeigt sich, dass ~~ihre Verteilung~~ dasselbe sich dem Gauss'schen Fehlergesetz: $y = A e^{-\alpha x^2}$ ~~entspricht~~ anordnen, so dass die meisten sich in der ~~[illegible]~~ gemäss Falllinie des Ausgangspunktes ansammeln, während ihre Zahl nach beiden Seiten zu ~~immer abnimmt~~, nach Massgabe der bekannten abnimmt Glocken-Curve.

Dieses Resultat ist mathematisch leicht erklärlich, sobald man annimmt, dass ~~die~~ eine jede Kugel nach dem ~~[illegible]~~ Austritt aus der Öffnung zwischen zwei Stiften ~~einer Öffnung~~ einer gegebenen Nagelreihe ~~[illegible]~~ gleiche Wahrscheinlichkeit dafür besitzt, dass sie für die Rechten ~~oder~~ zur Linken des darunterstehenden Nagels die nächsten Stift reihe passieren wird. ~~Denn dann folgt~~ Dieser Vorgang ~~[illegible]~~ lässt sich ganz zufällig, mit gleicher Wahrscheinlichkeit für rechts und links ~~[illegible]~~

so lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel beim Passieren der mten Stiftreihe eine der aus der Mittellinie n fachen Nagelabstand gleiche seitliche Entfernung besitzt, nach dem bekannten Bernoulli'schen Satze zu $W(n) =$ ermitteln, was für grosse Werte der Zahl m angenähert in die vorerwähnte Formel übergeht.

Es wird also die komplizierte Gesamterscheinung auf einfache Elementarvorgänge zurückgeführt, aber es bleibt noch aufzuklären, wieso letztere als ganz zufällig angesehen werden können, obwohl eigentlich die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit der Kugel die weitere Bewegung derselben eindeutig bestimmen sollte.

Um unkontrollierbare Nebenumstände möglichst auszuschalten, denken wir idealiter das Beispiel durch Voraussetzung vollständiger Glattheit der schiefen Ebene, exakter Anordnung der Nägel nehmen wir ferner an, der Kugeldurchmesser sei fast gleich dem freien Abstand der Nägel und die Kugelgestalt der Kügelchen und Stöße der Kugeln an letztere mögen nach Anstoß der Kugel zwischen zwei Stiften inelastisch verlaufen. Offenbar ist dann die ~~spurenweise~~ übrigbleibende Horizontalcomponente der Geschwindigkeit allein massgebend dafür, ob der nächste Stift auf der rechten oder linken Seite getroffen wird, ob also die Kugel denselben auf der einen oder andern Seite passieren wird. Jene Horizontalcomponente ist aber das Resultat vielfacher Reflexionen der Kugel zwischen zwei Stiften und ist durch die Lage der Centrilinie beim ersten Stoß an der betreffenden Stiftreihe eindeutig bestimmt. Eine ganz minimale Lagenänderung einer Centrilinie genügt um zu bewirken, dass die Richtung jener Horizontalcomponente umgekehrt wird. Bei weiterer äusserst geringer Lagenänderung wird dieselbe wieder umgekehrt u. s. w. Wir erkennen also die wesentlichen Züge des „geregelten" Zufalls: 1) „kleine Ursachen-gross Wirkung" und 2) genau aber charakteristisch ausgedrückt: „verschiedene Ursachen-gleiche Wirkungen".

Im Grenzfalle, wenn der Kugeldurchmesser genau gleich dem freien Abstand der Stifte ist, verliert die Function, welche den Zusammenhang zwischen Anfangskonstellation und Endlage der Kugel ausdrückt, den analytischen Charakter. Es wird sich die Gauss'sche Glockencurve herstellen, ganz unabhängig davon, wie klein auch die Schwankung der Anfangskonstellationen der Kugeln sei. Wir erhalten ein Modell eines sozusagen ideal zufälligen Vorganges.

Dieser Vorgang bildet nebenbei bemerkt, eine treffliche Illustration einer ganzen Klasse physikalischer Erscheinungen: der Diffusionsphänomene (und Wärmeleitung), welche wir als Diffusion und Wärmeleitung zu bezeichnen pflegen. Ohne an dieser Stelle in Einzelheiten einzugehen, erwähnen wir beispielsweise, dass die seitlichen Verschiebungen, welche die Kugel beim Hindurchrollen durch die aufeinander-

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \int \frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}} = \int_{-a}^{+a} \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \pi$$

Wir werden also allen Einwänden gerecht wenn
Mit Rücksicht auf diese Umstände werden wir

~~Ferner dürfte es rationeller sein~~ (unsere vorherige ~~Definition~~ Satz ? in folgender Weise modificieren:

der zufälligen Ursache x — Weltz besteht)

~~Wenn~~ Für eine vom Zufall abhängige Größe y (ein Wahrscheinlichkeitsgesetz falls die ~~[illegible]~~ der Zusammenhang zwischen y und x darstellende Funktion
derart beschaffen ist dass) auf den betreffenden Variabilitätsbereich erstreckte
einer beliebigen diskreten Punktmenge x) d.h. (mit Ausnahme prozentuell verschwindend wenig zahlreicher Ausnahmsfälle)

Wert — in Allgemeinen

~~stets~~ immer (annähernd) eine und dieselbe Verteilung der Punktmenge y entspricht

Diese Def. ist vom math. Standp. noch schärfer zu fassen. Aber für unsere Zwecke genügend worauf es ankommt

Noch V. (der erste der zwei vorher erwähnten Punkte mit Rücksicht auf die (eigentlichen Frage nach der Wesen des Zufalls, was er ist.)

Dies ist eine mehr formale Bemerkung. (Wichtiger scheint mir) ~~ein Umstand, welcher sich auf den ersten Punkt d~~
~~[illegible]~~ (das Gesetz d. großen Zahlen ~~[illegible]~~) (eine zufällige Variabilität der primären
~~[illegible]~~ V ~~Wahrscheinlichkeit~~ ~~(wie die [illegible]~~ ~~die [illegible]~~ Ursachen (die Anfangsbedingungen
In unserer Erklärung — bedeuten wir uns die Annahme
des Würfelwurfs usw.) ~~innerhalb eines gewissen Variabilitätsgebiet sind~~ und dies ist ohne weiters verständlich,

wenn es sich um von menschlicher Hand ausgeführte Experimente handelt, es wird da der Zufall in letzter Linie auf
(den Menschen, samt seinen unberechenbaren launischen Einfällen (ex primum movens) ganz ausschaltet. ~~wenn man~~
physiologische ~~[illegible]~~ psychologische Ursachen zurückgeführt. Wenn man aber annimmt, dass ~~[illegible]~~ die einen (Vorgang (physikalischen)
bestimmenden Umstände ganz exact definiert sind, ~~[illegible]~~ kann da der Begriff der W. keine Anwendung finden ?
uns eines Besseren belehren.

Meist wird dies behauptet, während die Beispiele 1–3 ~~[illegible]~~ das Gegenteil

~~kein~~ Galton'sche Brett — sehr

Wird (die Anzahl (der Nagelreihen ~~[illegible]~~) ~~groß gemacht und entwirft man eine Statistik~~
(in ganz bestimmter Weise)
eine einzige Kugel (auf ein „begrenztes Galtonsches Brett" gesetzt, dessen ~~[illegible]~~ Stiftreihen ausserordentlich zahlreich sind,

und entwirft man eine Statistik der Stellen, wo sie die nacheinanderfolgenden Reihen passiert, so wird man finden, dass ~~[illegible]~~
alle Werte der Abszissen (annähernd) gleich häufig vorkommen (sie sind gleich wahrscheinlich). ~~[illegible]~~ Im Beispiel (2) lässt sich der Ort, welchen die
(in bestimmter Richtung hineingeschleuderte)
(Kugel in einem bestimmten Zeitpunkte annehmen wird, (falls man die Gestalt des Gefässes mathem. exakt kennt) theoretisch voraus berechnen ~~aber~~). Lässt man die

abgelaufene Zeit unbestimmt, so sind sie alle ~~Orte innerhalb des Gefäßes~~ „gleich wahrscheinlich". ~~Das lässt sich~~

x) Das lässt sich
in einem singulär einfachen Spezialfall ohne weiters nachweisen. Wenn es sich nämlich ~~[illegible]~~ um ein Quadrat
handelt und ~~[illegible]~~ ein Punkt aus einer Ecke unter einem Winkel von 30° geschleudert wird sieht man (leicht ein), dass
die durch vielfache Reflexionen hervorgerufenen Auftreffpunkte auf ~~der~~ die Seite des Quadrates (im Laufe der Zeit) gleichmässig dicht
erfüllen werden. ~~Analog kann man sagen~~ : ein (Punkt der ~~Masse~~ ~~Einfluss~~ welcher zwei zu einander senkrechte Schwingungen

~~Ein komplizierteres Wahrscheinlichkeitsgesetz resultiert~~ $x = a \sin t$, $y = b \sin ct$
von incommensurabler Schwingungsdauer ausführt, (wird (derselbe) in einem unbestimmten Zeitpunkte an irgend einer Stelle

des ~~[illegible]~~ Rechteckes a b mit der Wahrscheinlichkeit $f(xy)\,dx\,dy = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{b^2-y^2}}$ anzutreffen sein.

~~[illegible]~~ (solche Erscheinungen ~~anzugeben~~ bestätigen
~~Z~~ Analogie lässt sich ~~[illegible]~~ ~~Vorgänge behaupten~~, bei welchen dieselbe (Art) Elementarvorgang sich im Laufe
~~[illegible]~~ (der Begriff der Wahrsch. auf alle (mit (stets) wechselnden Parametern"
der Zeit immer (wieder) wiederholt, ~~vorausgesetzt dass der~~ (Vorgänge ~~nicht~~ Exact periodisch) ~~[illegible]~~ bilden dabei ~~[illegible]~~ ~~Ausnahmsfälle~~. ?

In der statistischen Mechanik ist (gelten soll) diese Anschauungsweise ~~bedeutet, begründet das~~ daher kommt dass man den Begriff
„Zeitmittel" an Stelle des damit der Größe nach übereinstimmenden „Raummittel" einführt.

Maxwell continuity of path

Diese zwei Bemerkungen machen uns vor Allem auf einen mehr formalen Mangel jener Aufstellungen aufmerksam,

Handelt es sich nun um Ursache x welche wir weiter auf noch primäre Ursachen zurückführen können, so könnten wir φ
(der Sonne)
nur empirisch bestimmen ermitteln

von welcher überdies ~~eine gewisse notwendige~~ die Eigenschaft (2) vorausgesetzt wird. Es wäre also viel natürlicher, wenn

wir (den Umweg über) die Einführung der abstrakten Einzelnen φ ganz vermeiden und direkt nur eine gewisse Menge von Einzelfällen in
Betracht ziehen. Man hätte also zu sagen: an Stelle d. Satzes d. Ursachen tritt der Effekt einzelnen zufälligen Ursache wird bestimmbar, falls der Kausalzusammenhang zwischen Ursache und Wirkung derart beschaffen ist, dass eine bestimmte (verteilte) Menge von x Werten (immer) annähernd
eine und (dieselbe Verteilung der (y Werte entspricht. Dabei soll der ~~[illegible]~~ Wörtchen „annähernd" den Umstand ausdrücken,

dass exakte Identität der y Verteilungen nur bei unendlich zahlreichen Mengen zu erwarten ist.

und je größer die Anzahl der Schüsse, desto gleichförmiger wird die Auffreudichte auf der Scheibe

Nun sind aber offenbar auch ganz abweichende Ergebnisse möglich. Wären z.B. alle (zehn) Intervalle gleich und mit der
Umlaufszeit der Scheibe kommensurabel, so würden (sich) alle Auftreffpunkte auf gewissen Stellen konzentrieren und der Rest der Scheibe (bleiben würde) leer.
Das wäre ein entscheidender Einwand gegen die (Anwendbarkeit der) zuletzt gewählten Formulierung, wenn uns nicht ~~[illegible]~~ die Neigung zu Hilfe käme, dass derlei abweichende Anordnungen ~~[illegible]~~ nur gewisse „ausgezeichnete" Ausnahmefälle bilden, deren Häufigkeit —
In der Nachbarschaft weiß man bekanntlich, dass es — populär ausgedrückt — unendlich viel so viel irrationale Zahlen gibt als ganze Zahlen

folgenden Stiftreihen erfährt, genau mit den durch die sogen. Brown'sche Molekularbewegung hervorgerufenen Verschiebungen übereinstimmen. Und würde wir, anstatt die Kugeln von einer bestimmten ~~Anfangs~~ Stelle in der Mitte des Drittes ausgehen zu lassen, so vorgehen, dass ~~von~~ aus allen Öffnungen ~~einer~~ der obersten Stiftreihe auf der rechten Hälfte des Drittes schwarze, auf der linken Hälfte weiße Kugeln austreten, so würde deren allmählige Vermischung beim Passiren der Stiftreihen genau der Diffusion zweier Gase in den bekannten Versuchen Loschmidt's entsprechen.

II). Ein in mathematischer ~~Analyse~~ Hinsicht komplizirteres, aber physikalisch noch einfacheres Beispiel ist das Folgende: Denken wir uns ein beliebig unregelmäßig oder sonstigen geformtes Gefäß, mit vollkommen reflectirenden Wänden, ~~und in welchem sich eine sehr kleine Öffnung befindet, und werfen wir~~ in welches wir durch eine sehr kleines, in einer Wand angebrachtes Loch ein elastisches Kügelchen (am besten ein Gasmolekül) hineinschleudern, und überlegen wir, wann das Kügelchen ~~wieder~~ wieder durch jenes Loch aus dem Gefäße austreten dürfte. Sofern jenes Loch im Verhältniß zur ganzen Wand~~oberfläche~~fläche genügend klein ist, wird die Kugel im Allgemeinen ~~stets~~ infolge der vielfachen Reflexionen einen äußerst komplizirten Zickzackweg zurücklegen müssen, bis es die Austrittsöffnung erreicht, und

~~Es~~ Es ist klar, dass eine äußerst kleine Änderung der Anfangsrichtung ~~eine~~ noch längere Zeit eine sehr erhebliche Änderung der Bahn und damit auch eine ~~schließliche~~ bedeutende Änderung der Austrittszeit hervorrufen muss. Ebenso ~~ist klar~~ begreift man, dass dieselbe Austrittszeit ~~durch~~ mittels sehr verschiedener Anfangs Konstellationen zu erreichen ist — man braucht blos nur ~~die~~ verschiedene Austrittsbahnen rückwärts zu verfolgen. ~~Somit sind die Bedingungen für~~ Es scheint also die Möglichkeit einer Wahrscheinlichkeitsberechnung ~~erfüllt~~ gegeben zu sein.

Allerdings ~~scheint~~ ist eine exakte (mathematische Analyse) wohl ~~Berechnung~~ noch nicht durchgeführt worden ~~sein~~, aber physikalische Überlegungen aus dem Gebiete der kinetischen Gastheorie, wie auch der Strahlungstheorie, wo dasselbe Problem in anderer Form zur Sprache kommt, ~~lehren uns~~ machen es plausibel, dass bei ganz beliebiger Vertheilung der Anfangsrichtungen im Laufe genügend langer Zeit eine Ausgleichung der Wahrscheinlichkeiten stattfindet, so zwar dass dann jedes Volumelement jenes Hohlraumes für die Kugel einen gleich wahrscheinlichen Aufenthaltsort bildet, dass ~~alle Bewegungsrichtungen~~ sie sich in irgend einer Richtung gleich wahrscheinlich ~~sind~~ bewegt und dass ~~jeder~~ ein durchschnittlich auf jedes Flächenelement der ~~Wand~~ Gefäßwand gleich ~~[illegible]~~ häufig auftrifft.

~~Ist die~~ Wird die Geschwindigkeit der Kugel mit c, ~~die Flächenausdehnung der Gefäßwand mit F~~ das Volumen des Gefäßes mit V und die Querschnitt der freien Öffnung mit ω bezeichnet, so ~~ist~~ ~~beträgt~~ dient sich nach Analogie mit der Gastheorie leicht rechnen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel jene Öffnung einmal während des Zeitraumes τ passire: $W = \frac{\omega c}{4V}\tau$ beträgt, also ist die ~~einmal mittlere [illegible]~~ durchschnittlich bis zum Austritt der Kugel aus dem Gefäß verfließende Zeit: $T = \frac{4V}{\omega c}$.

Neigungswinkel der Wände, um diese Anordnung nach entsprechend langer Zeit zum Verschwinden zu bringen und sämmtliche Richtungen des Raumes für die Bewegung der Kugel annähernd gleichwahrscheinlich zu machen. Wird also nicht ein speziell „ad hoc" mathematisch genau konstruirtes Gefäß ausgesucht, so wird durch die Reflexionen eine Gleichverteilung der Bewegungsrichtungen im Raume erzielt. Die theoretische Möglichkeit singulärer Ausnahmefälle kommt praktisch nicht in Betracht.

Wir werden aber wohl allen Einwänden gerecht, wenn wir unseren vorherigen Satz in folgender Weise modifiziren: Für eine von der zufälligen Ursache x abhängige Wirkung y besteht ein Wahrscheinlichkeitsgesetz, falls die den betreffenden kausalen Zusammenhang darstellende Funktion derart beschaffen ist, dass einer beliebigen diskreten Wertmenge x im Allgemeinen — d. h. mit Ausnahme prozentuell verschwindend wenig zahlreicher Ausnahmefälle — immer annähernd eine und dieselbe Verteilung der Wertmenge y entspricht.

Vom mathematischen Standpunkt aus wäre dieser Satz noch schärfer zu fassen, aber die obige Formulierung dürfte den Grundgedanken, auf welchen es hier ankommt, in genügend verständlicher Weise hervorheben.

VI.

Noch wichtiger als die mehr formale Frage, mit der wir uns im vorigen Abschnitt beschäftigten, scheint mir die Frage nach der eigentlichen Genese des Zufalls zu sein, welche durch die ersten der beiden im vorigen Abschnitt erwähnten Einwände nahegelegt wird. Die zufällige Verwickeltheit der Ursachen, auf welche sich unsere Erklärung des Gesetzes der großen Zahlen stützte, ist ohne weiteres

Ebenso ist im Beispiele der zusammengesetzten Schwingung des V. Abschn. die Wahrscheinlichkeit ganz klar definiert als relative Häufigkeit, mit welcher der bewegliche Punkt (innerhalb langer Zeiträume) in einem gewissen Flächengebiete anzutreffen ist, obwohl dabei von einer Variation der die Bewegung bestimmenden Anfangsbedingungen gar nicht die Rede ist.

Es lässt sich nämlich der Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit in ganz analoger Weise auf alle solche Erscheinungen anwenden, bei welchen dieselbe Art Elementarvorgang sich (eventuell mit wechselnden Parametern) im Laufe der Zeit immer wieder wiederholt. Bekanntlich beweist die statistische Mechanik, dass derlei Bewegungsvorgänge durchaus nicht selten sind; im Gegenteil, es gehören dazu, laut einem Satze von Poincaré, die Bewegungen aller „endlichen" mechanischen Systeme konservativer Art. Sie sind sämmtlich „quasi periodisch" (in speziellen Fällen exakt periodisch), d. h. dass

Wir erkennen im Obigen die wesentlichen Züge des „geregelten" Zufalls: (1). „Kleine Ursachen — große Wirkung" und (2). — genau aber charakteristisch ausgedrückt — „Verschiedene Ursachen — gleiche Wirkungen". Im Grenzfalle, wenn der Kugeldurchmesser genau gleich dem freien Abstand der Stifte ist, verliert die Funktion, welche den Zusammenhang zwischen Anfangskonstellation und Endlage der Kugel ausdrückt, den analytischen Charakter. Es wird sich die Gauss'sche Glockenkurve herstellen, ganz unabhängig davon, wie klein auch die Schwankung der Anfangskonstellation der Kugeln sei. Wir erhalten ein Modell eines sozusagen ideal zufälligen Vorganges.

Man könnte versucht sein die

Bis in alle Einzelheiten

Sehr einfach lassen sich diese Verhältnisse in einem ähnlichen aber zweidimensionalen Beispiele übersehen, in welchem aber auch die mit den Reflexionen an der Wand verbundenen Diskontinuitäten vermieden werden. Stellen wir uns einen Punkt vor, welchen wir unter Einfluss willkürlich gewählter (von einander unabhängiger) elastischer Kräfte X, Y eine zusammengesetzte Schwingungsbewegung: $x = a \sin \alpha t$, $y = b \sin \beta t$, ausführen lassen, wie dies beispielsweise bei der Darstellung der Lissajou'schen Figuren in der Akustik geschieht.

Würden es wir gelingen die betreffenden elastischen Systeme (Stimmgabeln) derart einzurichten, dass die beiden Schwingungszahlen mit einander kommensurabel werden, so würde der Punkt eine geschlossene Curve in periodischer Weise zurücklegen, ohne die übrigen Teile der Bahnfläche zu durchstreichen.

Offenbar ist dies ganz ausnahmsweise der Spezialfall, welchen ich mit numerischer Genauigkeit in Betracht kommt, so würde dies die beiden elastischen Systeme gerade für welche wir uns entschieden, welche wir mit numerischen Hilfsmitteln nie zu erreichen hoffen können, da es numerisch unerschwinglich ist, das sich in periodischen Verhältnis der Schwingungszahlen einstellt; im Allgemeinen so aber in jedem Falle entsteht eine ungeschlossene Curve, welche das Rechteck a b innerhalb jeden einzelnen Punkte beliebig nahe kommt, und zwar findet man leicht, dass die relative Zeitdauer, während welcher der schwingende Punkt (oder die Wahrscheinlichkeit) in einem gegebenen an der Stelle x y gelegenen Flächenelement angetroffen wird, gegeben ist durch

$$W(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{b^2-y^2}}\,dx\,dy$$

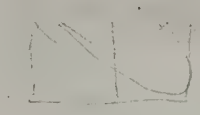
und zwar ist dieses W.S. ganz unabhängig von den Kräften X_1, Y_1 (resp. d. Schwingungszahlen) im Allgemeinen unabhängig von den Anfangsbedingungen.

Zeitdauer sind nur dann maßgebend wie rasch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos\beta t}{a\cos\alpha t} = \frac{\sqrt{b^2-y^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\alpha^2 a^2 \cos^2\alpha t + \beta^2 b^2 \cos^2\beta t}$$

$$= \sqrt{\alpha^2(a^2-x^2) + \beta^2(b^2-y^2)}$$



Bemerken wir noch dass durch die obigen Schwingungsgleichungen jedem Punkt des Rechtecks a b eine (resp. zwei) Fortbewegungsrichtungen und eine gerade Bewegungsbahn zugeordnet ist.

Falls nun anstatt eines einzigen vom Nullpunkt ausgehenden Punktes eine ganze Schar derartiger anfangs willkürlich verteilter Punkte gemäß jenem Gesetze in Bewegung gesetzt wird, so ist klar dass im Allg. nach entsprechend langer Zeit die Spuren der ursprünglichen Anordnung der Punkte verschwinden und eine von (über die Fläche des Rechtecks) derselben unabhängige Verteilung (der Art) nach Maßgabe des oben abgeleiteten Wahrscheinlichkeitsgesetzes resultiert.

In ähnlicher Weise ist verständlich, dass andauernd durchrütteln zweier in einem Gefäße anfänglich gesonderter Flüssigkeiten im Allg. eine homogene Verteilung bewirkt, dass einzelne Gasmoleküle, welche in einem geschlossenen Raume ursprünglich beliebig angeordnet wurden sich in demselben im Laufe der Zeit im Allgemeinen ohne Rücksicht auf die anfängliche Anordnung so verteilen als ob ihre Lage ganz zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit für alle Volumenelemente) wäre. Dies rechtfertigt über die Deutung der üblichen Sätze der kinetischen Gastheorie zur Deutung solcher Größen in denen die Durchschnittswirkung eines großen Molekülkomplexes zum Vorschein kommt. In allen derartigen Fällen sind zwar Ausnahmefälle theoretisch möglich, kommen aber wegen ihres verschwindend geringen Wahrscheinlichkeitsgrades nicht in Betracht

in der Formulierung unseres vorigen Satzes)

Wenn wir der der Möglichkeit (bestehen Abtlgn, so müssen wir in denselben

diesbezüglichen Einwänden [illegible] so können wir unsere vorige Satz modifizieren indem wir

das Wörtchen „immer" durch den Ausdruck „in Allgem..." (bestehen ~~welche gleichbleibend sind~~

mit Ausnahme poss. vorübergehender Ausnahmefälle —)

~~Oder aber~~ Vielleicht ist es aber noch richtiger zu sagen

trifft der Kern der Sache mehr die Aussage:

Noch deutlicher aber können wir (anstatt dessen) sagen: ~~Das~~ ~~ist~~ y im (Ausdruck) ~~bedeutet~~ ~~heißt soviel~~ dass

(Das ist) Die (variablen) Ursache x abhängige Wirkung y (besteht) ein W. S. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ (wenn man gewisse Eigentümlichkeiten der) ~~[illegible]~~ (der betreffenden

Kausalbeziehung darstellenden) Funktion (nämlich: 1). dass kleine Änderungen von x (bewirken soll) [illegible] y hervorrufen

können (?) 2). dass die ~~Anzahl der Werte~~ Menge der Gruppierungen (von x Werten) welchen annähernd ~~[illegible]~~ (eine und dieselbe)

y Gruppierungen entsprechen (in jedem endlichen Intervall) unendlich (unmessbar) zahlreicher ist als die Menge der x Gruppierungen, welche merklich

abweichende y Verteilungen hervorrufen.

Von m, St etc. ...

~~Nur darauf sei noch speziell aufmerksam gemacht, dass es offenbar einfacher oder mindere~~

~~Anwendung erreicht wird, [illegible] In der [illegible] praktischen Anwendung des W.R.,~~

~~begnügt man sich dabei meist mit einer sehr rohen Anwendung vollkommen begnügt.~~

Nur ~~[illegible]~~ einen Umstand ~~sei noch~~ speziell hervorgehoben, welcher in den obigen Sätzen wie auch in allen unsern

Beispielen zu Tage tritt: dass nämlich

vollständige Erfüllung und Wahrscheinlichkeit (welche in Wirklichkeit nur) (demzufolge Richtigkeit der) (Wahrscheinlichkeit offenbar) (einen Idealfall darstellt) BEG 1.

Um diese rein physikalische Seite des Zufalls noch klarer zu übersehen, wollen wir noch einen Vorgang betrachten, den man als vollkommensten Typus des „reinen physikalischen" Zufalls ansehen kann, d.i. den radioaktiven Atomzerfall.

Bekanntlich zerfallen alle Atome des Radiums im Laufe der Zeit, indem sie sich durch explosive Abstoßung je eines α Teilchens in Atome der Radium Emanation verwandeln. Dabei geht dieser Vorgang nach einem bestimmten Gesetz vor sich: Dabei kontrolliert der an (den Ra Atom) Verfügbarkeit jugendlich Erscheinen (noch bei des Alters der Organismus) konstatierbar Wahrnehmung, ein bestimmtes Atom einem Zerfall erleidet, das ist absolut zufällig und es (das) läßt sich in keiner Weise weder beeinflussen noch voraussehen.

(bei denen man die Größe λ in Übereinstimmung mit der betreffenden Zerfallskonstante der Ra-Atome konstatiert)

Hätten wir (eine) (Anzahl) derartige Gefäße von ganz gleicher Gestalt, und würden in jedes darüber eine solche Kugel in einer bestimmten Richtung in Bewegung setzen, so würden die (in Rede stehenden) Erscheinungen — Herausstreten der Kugel aus einem Gefäß und Abweichung einer α Partikel (aus einem der Radium-Atome) — bei der Kugel und einer Partikel (wie gleicher Art) von Radium-Atomen in ganz analoger Weise vor sich gehen.

Selbstverständlich glaube ich nicht, daß die Ra Atome wirklich derart gebaut sind, aber es kommt uns nur auf die prinzipielle Möglichkeit der Konstruktion eines derartigen Modelles des Zufalls an. Sie beweist jedenfalls, daß der scheinbare Widerspruch, welcher (im vorstehenden) die einfangs aufgeworfene „zweite Frage" betonte, in Wirklichkeit nicht besteht, und daß der Zufall — in dem in der Physik gebräuchlichen Bedeutung des Wortes — sehr wohl durch exakt definierte gesetzmäßige Ursachen hervorgebracht werden kann.

Diese Art Zufall spielt naturgemäß eine hervorragende Rolle in der Welt der Moleküle und es gibt zahlreiche dahin gehörige Erscheinungen wie z.B. die Brown'sche Molekularbewegung — welche das Walten des Zufalls in ganz anschaulicher Weise erkennen lassen. Man könnte vielleicht, um solche Fälle der durch die Zufälligkeit des willkürlichen Eingriffes eines lebenden Organismus verursachten gegenüber solchen von „molekularem" und „physiologischem" Zufall sprechen, und diese werden sich oft in komplizierten Zufallserscheinungen verketten.

Auf die weiter sich erhebende Frage, ob sich alle Zufallserscheinungen auf die obigen zwei Typen zurückführen lassen und inwiefern vielleicht im Grunde auch der „physiologische" in „molekularen" zerfällt, wollen wir nicht weiter eingehen. Überhaupt sei wohlwohl rückhaltlos, daß unsere Studie durchaus nicht eine erschöpfende Analyse aller mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff

Solche Vorgänge sind in gewissem Sinne mit den „zyklischen Bewegungen" Helmholtzens verwandt, aber eben darin von denselben verschieden, dass der ~~jedesmalige~~ Parameter der Bewegung sich jedesmal ändert. Werden dabei die Einzelheiten des zeitlichen Ablaufs der zugrunde liegenden Erscheinung (absichtlich) ignoriert und achtet man nur auf den in Rede stehenden Endeffekt, so tritt die „Zufälligkeit" desselben klar hervor. Dies scheint mir die Genesis des Zufalls in den uns gerade am nächsten liegenden Fällen der theor. Physik zu sein. (?

~~Als gerade typisches Beispiel eines rein zufälligen Vorganges sieht man heute den radioaktiven Atomzerfall~~

Die Wahrscheinlichkeit, dass es ~~ein bestimmtes Atom des radioaktiven Substrates~~ zufällig gerade (im Zeitraum $t \dots t+dt$) unter Abstoßung eines α oder β Teilchens einem Zerfall erleidet ~~ist~~ ist proportional der Länge dt ($W dt = \lambda dt$ wobei die Größe λ eine absolute Konstante, welche sich durch keine uns bekannten Agentien beeinflussen läßt.

Auf Grund des Vorhergesagten kann man nun ohne weiteres ein Modell des Zufalls geben: (in dieser Erhebung am Vorteil [illegible]) Denken wir uns den Inhalt des Gefäßes δ mit der hineingeschleuderten Kugel. Befindet sich in der Wand des Gefäßes eine (kreisförmige) Öffnung, so wird die Kugel solange (zwischen den Wänden) in komplizierten Zickzackwegen hin und her geschleudert werden bis sie gerade auf jene Öffnung ankommt und durch dieselbe nach Außen fliegt. ~~Ebenso wie beim Entstehen eines α Teilchens~~ (und zwar ist leicht nachzuweisen, dass auch hier gilt) die Wahrscheinlichkeitsformel gilt, wobei und zwar wird $\lambda =$ (wenn man den Durchmesser der Kugel als klein annimmt im Vergleich zum Durchmesser der Öffnung).

Allgemein „mechanischer Zufall" und „physiologischer Zufall" (vielleicht ist letzteres ~~durch ersteres~~ verursacht?)

Sicherung
Molekularer Zufall: die atomistischen Wirkungen von letzterem Standpunkt
Wahrscheinlichkeit
Beispiel typisch, wie Ton, Melodie

Wenn ein Draht ~~über~~ durch Zug und Spannung, ~~wenn~~ eine Hohlkugel durch einen Überdruck beansprucht wird, so (sagt man es) hängt der Ort wo ein Bruch stattfindet, die Form der Bruchstücke u.s.w. „vom Zufall" ab. In Wirklichkeit können es kleine Ungleichförmigkeiten des Drahtes usw. sein, welche indirekt auf den physiologischen Zufall bei Herstellung des betreffenden Objektes zurückzuführen sind. Aber auch wenn diese durch genügend gute Sorgfalt, entsprechende maschinelle Vorrichtungen beliebig klein gemacht sind, bleiben zufällige Ungleichförmigkeiten im Gefüge des Materials und diese rühren vom molekularen Zufall her. Wird beim Guß der Hohlkugel auch noch so vorsichtig verfahren, es müssen derartige Ungleichförmigkeiten eintreten. Das Ersteren beruht (nämlich) auf der Bildung von Krystallisationskernen in der unterkühlten Schmelze; und die Zahl und Anordnung derselben ~~von~~ werden aber vom molekularen Zufall ~~[illegible]~~ bestimmt, ~~und~~ der letztere ist für die ~~[illegible]~~ (molekularkrystallinische) Struktur des Gußstückes ~~bestimmt~~ verantwortlich welche (~~in letzter Linie~~) für die Festigkeitseigenschaften maßgebend ist. (Ausserdem ~~entstehen~~ bestehen auch in jedem Krystall zufällige Festigkeitsungleichheiten, infolge der Molekularbewegung, aber diese sind dennoch von verschiedenen Seiten.

wenn man dagegen Problème geben sollte. ~~[illegible]~~ Wir glauben aber Es scheint uns aber ein (wichtiges) auch für den Philosophen äußerst wichtiges Ergebnis zu sein, wenn auch nur auf einem begrenzten Gebiete — dem der mathematischen Physik — zeigen lässt, dass der Begriff der Wahrscheinlichkeit — in der (übertragenen) Bedeutung eines Häufigkeitsmaßes — eine objektive Bedeutung besitzt, dass man (die Größe und der Begriff des Zufalls ~~[illegible]~~ genau präzisieren kann — auch wenn man an Prinzip d. Determinismus festhält —) und dass sich dabei das Gesetz der großen Zahlen nicht als ein mystisches Prinzip und nicht als rein empirischer Erfahrungssatz sondern als ganz einfache mathematische Folge ~~[illegible]~~ der speziellen Form ergibt, welche in derlei Fällen den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung darstellt.

Vielleicht ist es nicht überflüssig schließlich noch zu bemerken daß

Der Wahrscheinlichkeitsrechnung kommt im Sinne dieser Auffassungsweise natürlich nicht der Wert eines prinzipiellen von den sonstigen Naturerkenntnissen unabhängigen neuen Erkenntnisprinzipes zu, da sie vielmehr nur einen vereinfachenden statistischen Schematisierung gewisser in der Natur sehr häufig auftretender funktionaler Zusammenhänge bildet, deren exakte Untersuchung einfache aber dennoch Komplexität eine ~~unabhängige~~ exakte Untersuchung sehr erschwert. Als das charakteristische Prinzip der jetzigen theoretischen Physik muß man ansehen die Auflösung der physikalischen Erscheinungen in verborgene Zeitvorgänge; Zufall und Wahrscheinlichkeit spielen dabei eine wichtige Rolle als anschaulich, abkürzende Hilfsbegriffe, könnten aber im Not auch vollständig entbehrt werden indem sich durch exakte statistische Deutung jene schematisierende Methoden vertreten lassen sollten.

*) Darin besteht wohl der wesentliche Unterschied der Forschungsweise (Newton, Boltzmann etc.) und der statistischen Schule Gibbs daß sich erstere auf jedem, nicht plausible (intuitive Zufalls und Wahrscheinlichkeits Ideen stützt, während letztere unter Vermeidung derselben allerdings aber nicht bewährend auf exakt statistische Methoden aufgebaut ist. (wegen der Ergebnisse, von welchen wird ganz in der Deutschen Tag)

Unsere Darlegung dürften aber auch den Grund hinreichend aufklären wieso die Anwendung der jenen Begriffe unter Vernachlässigung der Details der funktionalen Zusammenhänge doch zu einwandfreien Endergebnissen führen kann und wir verstehen daß sie namentlich in Gebieten wo eine exakte Verfolgung der Zeitvorgänge ausgeschlossen ist, ein unschätzbares Hilfsmittel bildet.

$W(x)\,dx = \varphi(x)\,dx$

$y = f(x)$

$W(y)\,dy = \varphi(f(x))\,\frac{dy}{f'(x)}$

Die Grenzen des Zufalls. Zufall und physikalisches Gesetz. Zufall und objektive Wahrscheinlichkeit in der Physik.

Es ist eine bekannte Tatsache, schon öfter hervorgehoben worden, daß keine zweite mathematische Disziplin auf so unklare und schwankende Grundlagen aufgebaut ist, wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sogar die Frage, deren Beantwortung eigentlich die Vorbedingung für eine rationelle Anwendung dieser Rechnungsmethode bilden sollte, die Frage ob der Wahrscheinlichkeitsbegriff nur ein subjektiver oder ob ihm eine eventuelle objektive Bedeutung zu Grunde liegt, hat von verschiedenen Seiten diametral verschiedene Beantwortung erfahren. Insbesondere haben an der diesbezüglichen Diskussion nur Mathematiker und Philosophen teilgenommen, heute aber muß noch dafür, daß der moderne Physiker vor allem interessiert, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche zum ersten Male von Clausius und Maxwell in die kinetische Gastheorie eingeführt wurde, in den letzten Zeiten infolge des Ausbaues der atomistischen Theorien der Elektronik, der Radioaktivität und Strahlungstheorie eine so umfassende Bedeutung für die theoretische Physik erlangt, daß sie geradezu die universelle Untersuchungsmethode im Gebiete derselben bildet und gerade bei den tiefstgehenden Forschungen anzuwenden.

Heute scheinen doch sämtliche physikalische Gesetze mit wenigen grundlegenden Ausnahmen (Maxwell's elektromagnetische Gleichungen für den Äther, Energiegesetz, Gravitationsgesetz, Relativitätsprinzip) nur der Superposition komplexester Einzelerscheinungen zu entspringen, wobei die scheinbare Einfachheit und Regelmäßigkeit derselben nur eine scheinbare Wirkung des Wahrscheinlichkeitsgesetzes „der großen Zahlen" ist. Und es ist wohl möglich, daß in Zukunft auch diese letzten auf statistischen Regelmäßigkeit reduziert werden.

Trotzdem noch keinerlei Gesetz bekannt sein wird.

Trotz dieser immensen Ausdehnung d. Anwendungsbereiches der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat die exakte Analyse der zugrunde liegenden Begriffe nur geringe Fortschritte gemacht, da auch die Physiker meist damit begnügen, auf die intuitive Wahrscheinlichkeit zu berufen. Die Mathematiker pflegen diesen Fragen aus dem Wege zu gehen, indem sie mit Vorliebe ausweichen, indem sie sich darauf berufen, daß die Wahrsch. Rechnung nur dazu dient, um die Wahrscheinlichkeit komplexerer Ereignisse aus den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse abzuleiten, wobei letztere von vornherein gegeben sein müssen (Poincaré ...

Die Philosophen wenden ihre Aufmerksamkeit meist der psychologischen, logischen oder erkenntnistheoretischen Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu — wobei vor allem die subjektiven Momente desselben in den Vordergrund treten, und pflegen gerade an den Fragen vorüberzugehen, die den Physiker interessieren: nach der Art der objektiven Vorgänge auf welche jener Begriff durch jene dargestellt wird berechtigten Weise anzuwenden ist.

Mit der vorliegenden Studie möchte ich einen Impuls zu Untersuchungen geben, in welchen gerade jene objektiven Momente in den Vordergrund gerückt werden. Angesichts dessen, daß Wahrscheinlichkeit ein recht vieldeutiger Begriff ist (wie Poincaré treffend bemerkt), sei es von vornherein hervorgehoben, daß wir denselben in dem sehr eingeschränkten „mathematischen" Sinne gebrauchen wird, wie er in der theoretischen Physik vorkommt,

S. a p. 2. (Timeskip) ——→

Wir erkennen ohne weiteres an dass das Wort Wahrscheinlichkeit (sehr oft zur Kennzeichnung eines subjektiven Vermutungsgrades dient und dass es auch in Fällen gebraucht wird, welche überhaupt keiner eindeutigen Präzisierung zugänglich sind, aber diese Bedeutung jenes Wortes ~~ist uns ein Prob~~ so sehr wir den Psychologen interessieren mag — ist uns als Physikern ganz fremd.

Kommt bei unseren Überlegungen gar nicht in Betracht. Es verhält sich damit ähnlich wie mit vielen andern Begriffen, die der Physiker in wesentlich andrem ~~Sinn~~ Sinne gebraucht als dies im gewöhnlichen Leben üblich ist. (wie Kraft, Arbeit, Energie, Wärme ...)

Da wir die W.R. auf zufällige Ereignisse bezogen hatten

~~[illegible]~~ Die grundlegende Frage, von der alles Weitere abhängt, scheint mir nun zu sein: Was ist der Zufall? Damit hängen die weiteren Fragen zusammen: Wie ist es möglich dass wir für unsere Zwecke den Effekt des Zufalls berechnen können, dass also ~~die~~ zufällige Ursachen ~~regel~~ gesetzmässige Wirkungen haben? und andrerseits: Wie ist es möglich dass

Wir kann der Zufall entstehen, wenn nur alles Geschehen auf regelmässige Naturgesetze ~~[illegible]~~ zurückzuführen ist ~~[illegible]~~ oder mit andern Worten: wie können regelmässige Ursachen eine zufällige Wirkung haben?

Betrachtet man in populärer Weise den Zufall als die Negation des Gesetzmässigen so ~~[illegible]~~ sind alle Widersprüche wohl unüberbrückbar. Nun pflegt man somit vom (deterministischen) Standpunkt aus ~~ein gesetzmässiger Verlauf de~~ anzunehmen dass „zufällige" (der Verlauf) Ereignisse zwar durch innere Gesetze regiert werden, denselben uns aber unbekannt sind, während der Schein der Gesetzlosigkeit erzeugt wird. ( )

Die ~~Ueberzeugung~~ Auffassungsweise beantwortet also auch die Frage nach dem innern Wesen der W.R., dahin, dass dieselbe eine ~~[illegible]~~ ~~abkürzende~~ Redungsmethode bildet weder als abkürzende und vereinfachende

Die Wahrheit Begriffe – ~~[illegible]~~ das sie noch speziell hervorheben – bilden somit auf dem Hervorheben beruhen

Der Wert der besteht also darin, dass nicht etwa darin, dass sie neben ~~dass~~ die übrigen physikalischen und mathematischen Prinzipien ~~Fremdes und~~ ein denselben fremdes und von denselben unabhängiges Wahrheitsprinzip ~~[illegible]~~ setzen, sondern dass sie aus den ~~ist~~ Gebiete sehr komplizierter kausaler Beziehungen eine sehr charakteristische (und häufig vorkommende) Art von Zusammenhang zum Gegenstand hervorheben ~~[illegible]~~ was eine ~~besondere~~ außerordentliche Vereinfachung und Abkürzung der betreffenden Überlegungen ermöglicht aber prinzipiell nichts Neues bringt.

Paradox Russland,